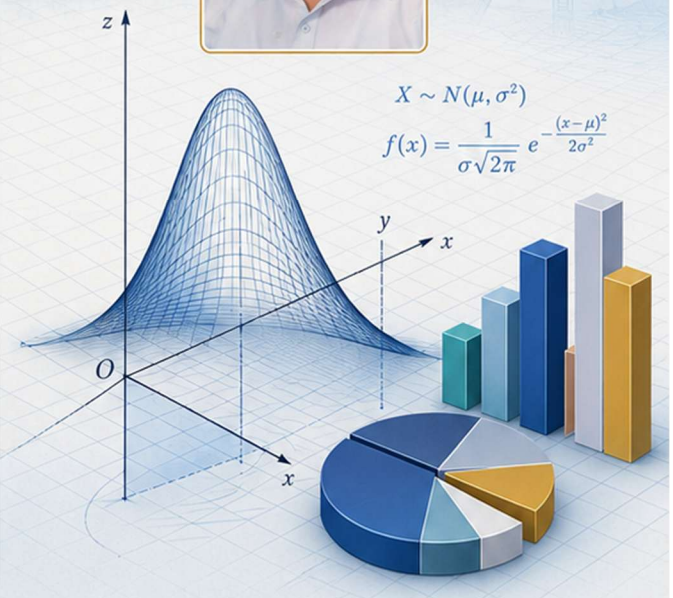
الإحصاء الهندسي

أ.د. عصام محمد عبد الباسط فواز

استاذ المساحة والجيوديسيا
كلية الهندسة/ جامعة الأزهر



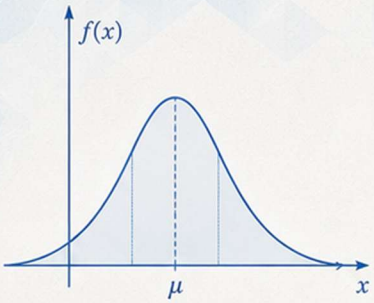




تمارين وتدريبات | أمثلة محلولة | تطبيقات هندسية | أسس نظرية

الإحصاء الهندسي

أ.د. عصام محمد عبد الباسط فواز

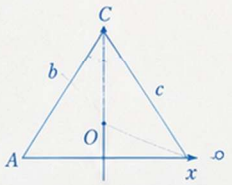


عن الكتاب

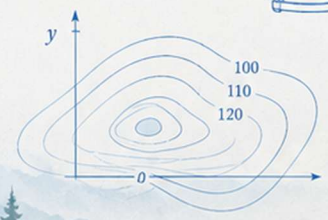
يقدم هذا الكتاب عرضا متكاملاً لمفاهيم الإحصاء الهندسي وأدواته المستخدمة في تحليل البيانات الهندسية والقياسات، مع التركيز على التطبيقات العملية والأساليب الرياضية الدقيقة.

يشمل الكتاب على:

- المفاهيم الأساسية في الإحصاء الهندسي
- توزيعات الاحتمال ونماذج التقدير
- اختبار الفروض والتحليل التباينى
- الانحدار والارتباط
- تطبيقات هندسية متنوعة
- أمثلة محلولة وتمارين تطبيقية







كلية الهندسة
جامعة الأزهر

محتــوى الكتاب

الموضوع	الصفحة
مقـــدمة الكتاب	
1– الطرق المبسطة لتحليل البيانات	1
2 – نظرية الاحتمالات	13
3 – التوزيعات الاحتمالية	19
1) مقدمة	19
2) التباديل والتوافيق : Permutations &Combinations	19
3) التوزيعات الاحتمالية المتقطعة : Discrete Distributions	21
4) التوزيعات الاحتمالية المتصلة : Continous Distributions	24
4 – التقديرات : Estimation	36
1) مقـــــدمة	36
2) بعض القوانين الهامة للتوقع Expectation:	36
3) التقديرات المتحيزة والغير متحيزة : Biased and Unbiased Estimators	38
4) طرق التقدير الرقمى (المحددة برقم): Methods of Point Estimation	40
5) التقدير بمجال (فترة) : Interval Estimation	44
5 – اختبارات الفروضTests of Hypothesis	54
1) مقدمة	54
2) الفرض الصفرى (العدم) H_0 والفرض البديل H_1	54

3) مناطق القبول والرفض للفرض الصفرى H_0	55
4) P–value (Sig.)	58
الحالات المختلفة لاختبارات الفروض	59
1 – اختبار الفروض على متوسط عينة	59
2 – اختبار فروض على متوسطى عينتين من مجتمعين مختلفين	64
3 – اختبار فروض على نسبة ما Proportions	70
4 – اختبار الفروض على فرق نسبتين : Differences of proportions	71
5 – اختبار الفروض على الفروقات بين الارصاد :Paired Observations	73
6 – تحليل التباين : ANalysis Of Variance ANOVA	77
الحالات المختلفة لبعض الطرق الاحصائية اللامعلمية	78
أ - حالة عينة واحدة (من مجتمع واحد) اختبار χ^2 لجودة التوفيق	79
	79
اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة	86
اختبار χ^2 لاستقلال خاصيتين لعينة	92
اختبار كلمجروف سميرنوف لعينتين	94
اختبار مان وتني mann - whitney	95
اختبار كروسكال واليس	101
أ - اختبارات التوزيع الطبيعى للبيانات Checking of Normality	105
1 – تعيين معاملى الالتواء والتفرطح	105
بواسطة χ^2 Check of Normality	110

2 – اختبار كولموجروف سميرونوف.	111
3 – اختبار شابيرو ويلك Shapiro-Walk	113
4 – P–P plot ، Q – Q Plot	120
ب – التحقق من **تساوي التباينات Homogeneity of Variances**	124
اختبار ليفين Levene's Test	124
7 - تحليـــــل التبـــــاين	127
1 – تحليل التباين في اتجاه واحد One– Way ANOVA	129
حجم تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع	131
الاختبارات البعدية Post Hoc Tests.	137
1 – طريقة أقل فروقات معنوية بين المجموعات (LSD)	137
2 – اختبار شيفى Scheffe	140
3 – اختبار توكى Tukey	142
2 - تحليل التباين الثنائيANalysis Of Variance 2 way ANOVA	145
تحليل ثنائي بدون تكرار للقياسات Without replication .	145
تحليل التباين الثنائي مع تكرار الارصاد	152
8 – تحليل الارتباط بين المتغيراتCorrelation Analysis	160
أ – معامل الارتباط بيرسون	162
إختبار الفروض على معنوية معامل الإرتباط ρ	167
إختبار الفروض على قيمة محددة لمعامل الإرتباط ρ	168

ب – معامل إرتباط سبيرمان	171
9 – الارتداد وتحليل الارتباطRegression & Correlation Analysis	174
1 - الانحدار الخطي البسيط	174
اختبار معنوية معامل الانحدار باستخدام توزيع t .	177
اختبار معنوية معامل الانحدار باستخدام توزيع F .	178
2 - معادلة الانحدار الخطى المتعدد	185
الجداول الاحصائية	192

بسم الله الرحمن الرحيم

مقـــــــــــدمة

الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله والصلاة والسلام على سيدنا محمد صلوات الله وسلامه عليه ، أما بعد فان هذا الكتاب يتناول بالعرض موضوع الاحصاء الهندسى بصورة مبسطة ومدعمة بالأمثلة التوضيحية وكذلك بالبرامج الاحصائية وبرامج الحاسب الآلى لموضوعات الكتاب المختلفة .

واني أسال الله تعالى أن يكون فيه النفع الكثير لطلبة كليات الهندسة بالجامعات والمعاهد المصرية والعربية ولطلبة الدراسات العليا للماجستير والدكتوراه وكذلك لاخواني العاملين في مجال الابحاث العلمية.

والله ولي التوفيق ،،،،

سبتمبر 2026

أ.د. عصام محمد غبد الباسط فواز

أستاذ المساحه والجيوديسيا

كلية الهندسة / جامعة الأزهر

1 – الطرق المبسطة لتحليل البيانات

Simple methods of analysis data

1) مقدمة :

لاجراء أى بحث أوتجربة تؤخذ عينة Sample من المجتمع Population وتكون نتيجة التجربة التى اجريت هو الحصول على عدة نتائج (قياسات ، أرصاد) . مثال ذلك أخذ عينة وليكن 20 طالبا (Sample– عينة) من الطلبة (Population – مجتمع) وذلك لمعرفة أعمارهم فى كلية من كليات الجامعة ، فتكون النتيجة هو الحصول على 20 رقم (رصدة) تمثل أعمار هذه العينة .الارصاد المأخوذة قد تكون :

أ – أرصاد غير متصلة (متقطعة) : Discrete data

وتكون الارصاد فى هذه الحالة ارقام صحيحة لاكسور بها ، مثال ذلك عدد طلبة ، عدد الذكور ، .....

ب – أرصاد متصلة: Continues data

وتكون الارصاد فى هذه الحالة ارقام صحيحة بها كسور عشرية بمعنى أنها مأخوذة على مقياس متصل ، مثال ذلك أعمار أو أوزان الطلبة فقد تكون أرقام صحيحة أوبها كسور عشرية .

والغرض من أخذ الارصاد هو دراسة متغير ما variable (اعمار – اوزان –أطوال ...) أوعدد أيام العام التى تتساقط فيها الامطار .

2) تمثيل الارصاد بيانيا :

يمكن تمثيل الارصاد المأخوذة باحدى الطرق التالية :

أ – Bar(Line) Chart :

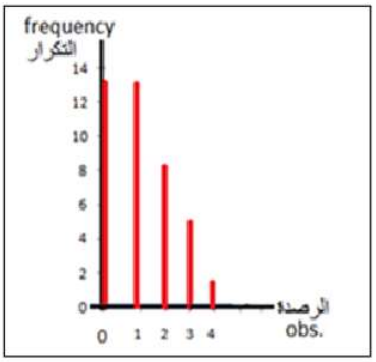
بفرض وجود عدد 40 رصدة نتيجة تجربة ما وكانت كمايلى :

3	0	0	1	0	2	1	0	1	1
0	3	4	1	2	0	2	0	3	1
1	0	1	2	0	2	1	0	1	2
3	1	0	0	2	1	0	3	1	2

من هذه الارصاد يلاحظ أن الرصدة 0 تكررت 13 مرة ، الرصدة 1 تكررت 13 مرة ، ..... ، فيمكن وضع هذه النتيجة فى جدول يطلق عليه اسم الجدول التكرارى جدول (1) وتمثيلها بيانيا كمافى شكل (1) فيمكن معرفة تكرار كل رصدة من الشكل مباشرة .

الوصدة Observation	التكرار (ت) Frequency (f)
0	13
1	13
2	8
3	5
4	1
Sum المجموع	40

جدول (1) : الجدول التكرارى



شكل (1) : Bar Chart

ب – المدرج التكرارى : Histogram

بأخذ عينة لأوزان 100طالب ونقسيمها الى المجالات المبينة فى جدول (2) والذى يطلق عليه الجدول التكرارى فنجد مثلا أن 6 طلبة تتراوح اوزانهم بين 60 الى 62 ، 15 طالب تتراوح اوزانهم بين 63 الى 65 ، ... ويمكن تعيين التكرار النسبى من العلاقة :

$$\text{Relative Frequency} = \frac{\text{Frequency}}{\text{TotalFrequency}} \quad ..,(1)$$

جدول (2) : الجدول التكرارى

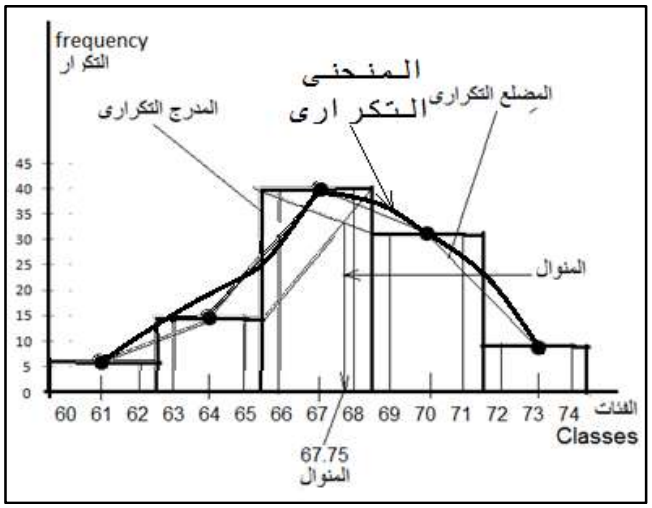
الفئة Class Interval	مركز الفئة Class Midpoint	التكرار (ت) Frequency (f)	التكرار النسبى Relative Frequency
60–62	61	6	0.06
63–65	64	15	0.15
66–68	67	40	0.40
69–71	70	30	0.30
72–74	73	9	0.09
Sumالمجموع		100	1

يطلق على الرقم الاصغر لكل فئة بحد الفئة السفلى (60 , 63, 66 , ...) وعلى الرقم الاعلى بحد الفئة الاعلى (62 , 65 , 68 , ...) . مركز الفئة هى القيمة التى تتوسط حدى الفئة الاعلى والسفلى . يمكن تمثيل الجدول (2) بيانيا فنحصل على المدرج التكرارى كماهو مبين فى شكل (2) .

أستاذ المساحة والجيوديسيا
كلية الهندسة / جامعة الأزهر
essamfawaz2001@gmail.com

جـ – المضلع التكرارى :

بتحديد مراكز الفئات فى أعلى مستطيلات المدرج التكرارى فى شكل (2) وتوصيلها نحصل على المضلع التكرارى . فى حالة وجود فرق بين حد الفئة العليا والحد السفلى للفئة التالية يؤخذ نصف الفرق مع الفئة السابقة والنصف الآخر مع الفئة التالية كماهو مبين بالشكل . يلاحظ أن المساحة تحت المدرج التكرارى مساوية لمجموع التكرارات الكلية بفرض أن طول الفئة مساوية للوحدة .



شكل (2): المدرج والمضلع التكرارى

د – المنحنى التكرارى : Frequency Curve

يمكن الحصول عليه برسم منحنى يمر أو يتوسط مراكز الفئات المحددة فى أعلى المستطيلات ، والمساحة تحته يساوى عدد التكرارات الكلية . من جدول (2) يمكن حساب عدد الطلبة التى تزيد أطوالهم عن الحدود السفلية للفئات فنحصل على التكرار المتجمع النازل والذى يبدأ بالتكرار الكلى 100 وينتهى بالصفر كماهو مبين فى جدول (3) . كذلك يمكن الحصول على التكرار المتجمع الصاعد والذى يبدأ تكراراته بالصفر وينتهى بالتكرار الكلى 100 كماهو مبين فى جدول (4).

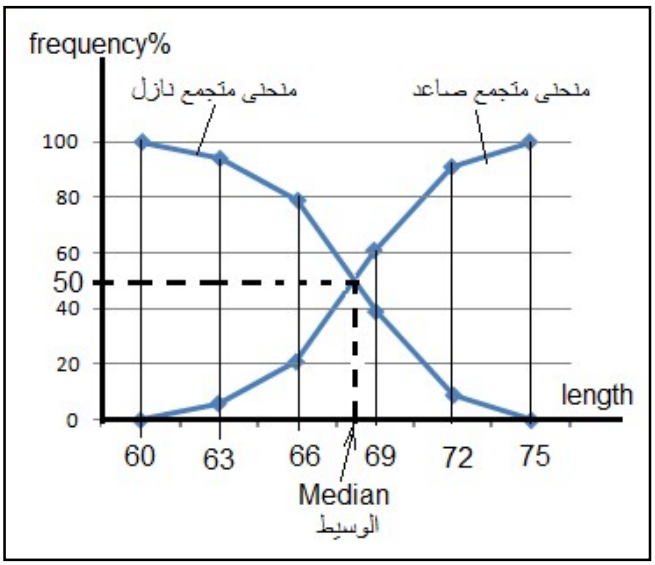
جدول (3) : جدول تكرارى متجمع نازل

length الطول	تكرار متجمع نازل	تكرار متجمع نازل %
> 60	100	1
> 63	94	0.94
> 66	79	0.79
> 69	39	0.39
> 72	9	0.09
> 75	0	0

جدول (4) : جدول تكرارى متجمع صاعد

length الطول	تكرار متجمع نازل	تكرار متجمع نازل %
< 60	0	0
< 63	6	0.06
< 66	21	0.21
< 69	61	0.61
< 72	91	0.91
< 75	100	1

شكل (3) يبين المنحنيان المتجمعان الصاعد والنازل .



شكل (3) : المنحنى المتجمع الصاعد والنازل

3) مقاييس النزعة المركزية : Measurements of central Tendency

الغرض من أية تجربة الحصول على قيمة تكون معبرة عن مجموعة الارصاد المأخوذة وهذه القيمة قد تكون :

أ) الوسط الحسابى : Arithmetic Mean

الوسط الحسابى هو متوسط مجموعة الارصاد ، فإذا كان لدينا الارصاد :

$x_1 , x_2 , \ldots x_n$ حيث n : عدد الارصاد ، فإن الوسط الحسابى $\bar{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} = \frac{[x]}{n} \quad \ldots, (2)$$

وفى حالة وجود الارصاد على شكل جدول تكرارى فإن :

$$\overline{x} = \frac{x_1 . f_1 + x_2 . f_2 + \ldots f_n . x_n}{f_1 + f_2 + \ldots f_n} = \frac{[x . f]}{[f]} \ldots, (3)$$

حيث تمثل $x_1 , x_2 , \ldots x_n$ فى هذه الحالة مراكز الفئات ،

$f_1 , f_2 , \ldots f_n$: تمثل تكرار كل فئة .

من خصائص الوسط الحسابى :

أ – المجموع الجبرى لانحرافات الارصاد عن الوسط الحسابى تساوى الصفر

$$(\bar{x} - x_1) + (\bar{x} - x_2) + \ldots . (\bar{x} - x_n) = 0$$

ب – مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابى أقل مايمكن :

$$(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \ldots . (\bar{x} - x_n)^2 = \min$$

وهذه الخاصية أساس لنظرية أقل مجموع للمربعات (نظرية الاخطاء) .

مثـــــال 1 :

الوسط الحسابى لمجموعة الارصاد : 8 , 6 , 3, 4, 9, 5 هو :

$$\overline{x} = \frac{5 + 9 + 4 + 3 + 6 + 8}{6} = 5.83$$

كمايمكن حساب الوسط الحسابى من الجدول التكرارى :

Observation الرصدة	4	5	6	8	Sum
Frequency (f) التكرار (ت)	2	2	1	2	7

من العلاقة :

$$\overline{x} = \frac{x_1.f_1 + x_2.f_2 + \dots f_n.x_n}{f_1 + f_2 + \dots f_n} = \frac{4x2 + 5x2 + 6x1 + 8x2}{7} = 5.71$$

مثـــــال 2:

الوسط الحسابى لمجموعة الارصاد فى جدول (2) :

$$\overline{x} = \frac{x_1.f_1 + x_2.f_2 + \dots f_n.x_n}{f_1 + f_2 + \dots f_n}$$

$$= \frac{61x6 + 64x15 + 67x40 + 70x30 + 73x9}{6 + 15 + 40 + 30 + 9} = 67.63$$

ب) الوسط الهندسى والوسط التوافقى: Geometric and Harmonic Mean

يعرف الوسط الهندسى

$$\hat{x} = \sqrt[n]{x_1.x_2.\dots\dots x_n} \qquad \dots, (4)$$

ويستخدم فى حالة الارصاد الموجبة فقط وقيمته أقل من الوسط الحسابى .

مثـــــال :

الوسط الهندسى للارصاد 6 ، 7 ، 9 ، 8 ، 15 : $\hat{x} = \sqrt[5]{6x7x9x8x15} = 8.537577$

والوسط الحسابى لمجموعة الارصاد = 9

الوسط التوافقى (استعماله نادر) يعين من العلاقة :

$$\breve{x} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{[\frac{1}{x}]} \qquad \dots, (5)$$

مثـــــال :

الوسط التوافقى للأرصاد 5 ، 6، 9

$$\check{x} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots.+\frac{1}{x_n}} = \frac{3}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = 6.28$$

جـ) الوسيط : Median

يعرف بأنه القيمة التى يكون عدد الارصاد الاكبر منها مساويا لعدد الارصاد التى قيمتها أقل منها ، ويحدد الوسيط لمجموعة أرصاد بترتيبها حسب قيمتها إما تصاعديا أو تنازليا وتؤخذ القيمة التى تتوسط مجموعة الارصاد .

فى حالة عدد الارصاد n ، يكون ترتيب الوسيط (order):

$$order of median = \frac{n+1}{2} \quad ..,(6)$$

وفى الارصاد الزوجية يؤخذ متوسط القيمتين الموجودتين فى الوسط .

مثـــــال :

الوسيط لمجموعة أرصاد فردية :

19 16 18 12 35 25 20

ترتب تصاعديا : 35 25 20 19 18 16 12

$$\text{order of median} = \frac{7+1}{2} = 4$$

ويكون الوسيط هو الرقم الرابع 19 .

الوسيط لمجموعة ارصاد زوجية :

18 16 13 12 109 8 6 5 4

$$\text{order of median} = \frac{10+1}{2} = 5.5$$

وتكون قيمة الوسيط متوسط الرقمين الخامس والسادس

$$\text{median} = \frac{9+10}{2} = 9.5$$

ويمكن تحديد الوسيط بتقاطع المنحنين الصاعد والنازل فى شكل (3) ، كمايمكن تحديد قيمتة من أحد المنحنيين بتقاطع تردد frequency%=50% مع المنحنى كماهو مبين فى شكل (3) .

د) المنوال : Mode

وهو القيمة الاكثر شيوعا فى مجموعة الارصاد (القيمة التى لها اكبر تكرار).

مثـــــال 1:

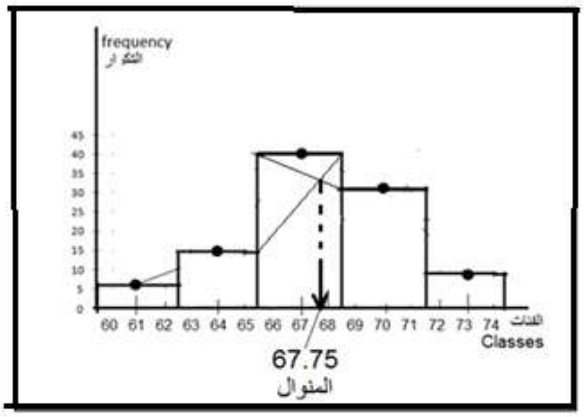
فى مجموعة الارصاد : 15 14 15 12 13 14 15 8 9 16 15

يكون المنوال يساوى 15 حيث أنه تكرر 4 مرات بينما الرقم 14 مرتين والارقام الباقية تكررت مرة واحدة.

مثـــــال 2 :

المطلوب تعيين قيمة المنوال للجدول التكرارى (جدول (2)) .

يلاحظ أن الفئة 66–68 لها اكبر تكرار 40 ، وبذلك يكون المنوال واقعا فى هذه الفئة وتحدد بالنسبة والتناسب وكماهو مبين فى شكل (2) وبأكثر توضيحا فى شكل (4) .



شكل (4)

كمايمكن ايجاد قيمة المنوال حسابيا من العلاقة :

$$M = a + \frac{d_1}{d_1 + d_2} . L \qquad .., (7)$$

حيث M : المنوال ، a : الحد الادنى للفئة الواقع بها المنوال ، d_1 : الفرق بين تكرار فئة المنوال والفئة السابقة لها ، d_2 :الفرق بين تكرار فئة المنوال والفئة اللاحقة لها

L : طول فئة المنوال .

بتطبيق ذلك فى المثال السابق :

$$M = a + \frac{d_1}{d_1 + d_2}.L = 6 + \frac{(40-15)}{(40-15)+(40-30)}x2 = 67.43$$

4) مقاييس التشتت : Measure of Dispersion

المقصود بالتشتت هو درجة تقارب أوتباعد مجموعة الارصاد عن بعضها ، واهمها :

أ) المدى (R) : Range

وهو الفرق بين أكبر وأصغر قيمة فى مجموعة الارصاد .

$$R = Max.value - Min.value \quad ..,(8)$$

من عيوبه اعتماده على قيمتين فقط من مجموعة الارصاد وقد تكونا متطرفتان فلاتعطى صورة حقيقية عن درجة التشتت . مثال ذلك فى مجموعة الارصاد 180 100 50 20 7 8 15 يكون المدى :R=180−7=173

ب) متوسط الانحرافات المطلقة M_{ad} : Mean absolute deviation

ويمكن تعيينه من العلاقة :

$$M_{ad} = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \ldots |x_n - \overline{x}|}{n} = \frac{[|x \quad - \overline{x}|]}{n} \quad ..,(9)$$

حيث تمثل $x_1, x_2, \ldots x_n$ الارصاد $\overline{x}$ المتوسط الحسابى ، n: عدد الارصاد . ويمثل المقدار

$|x_1 - \overline{x}|, |x_2 - \overline{x}|, \ldots$ القيم الموجبة للفروقات .

يلاحظ فى هذا المقياس تجاهل الاشارات بمعنى معاملة القيم الموجبة كالسالبة .

مثـــــال :

لمجموعة الارصاد 32 30 26 22 20 المطلوب تعيين متوسط الانحرافات المطلقة M_{ad} .

الحـــــــل :

من العلاقة (2): $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\dots x_n}{n} = 26$

ومن العلاقة (9):

$$M_{ad} = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \dots |x_n - \overline{x}|}{n} = 4$$

جـ) التباين (σ^2) : Variance

ويمكن تعيينه من العلاقة التالية بمعلومية الوسط الحسابى للعينة $\overline{x}$:

$$s^2 = \frac{[(x - \overline{x})^2]}{n-1} \quad .., (10)$$

وفى حالة معرفة الوسط الحسابى الحقيقى للمجتمع μ :

$$\sigma^2 = \frac{[(x - \mu)^2]}{n} \quad .., (11)$$

ويمكن استخدام العلاقات التالية :

$$s^2 = \frac{[x^2] - n.\overline{x}}{n-1} \quad .., (12-a)$$

$$\sigma^2 = \frac{[x^2] - n.\mu}{n} \quad .., (12-b)$$

مثـــــال 1:

اوجد تباين الارصاد : 0.9 1.3 1.4 1.2 0.8 1.0

الحـــــــل :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n} = 1.1$$

وتوضع الارصاد والحسابات فى جدول كمايلى :

	x	x^2	$(x-\overline{x})$	$(x-\overline{x})^2$
	0.9	0.81	−0.2	0.04
	1.3	1.69	0.2	0.04
	1.4	1.96	0.3	0.09
	1.2	1.44	0.1	0.01
	0.8	0.64	−0.3	0.09
	1.0	1.00	−0.1	0.01
[ ]	6.6	7.54	0.00	0.28

$$s^2 = \frac{[(x-\overline{x})^2]}{n-1} = 0.056$$

$$s^2 = \frac{[x^2]-n.\overline{x}}{n-1} = \frac{7.54-6x1.1}{6-1} = 0.188$$

فى حالة وجود الارصاد فى جدول تكرارى فإن :

$$s^2 = \frac{[f.(x-\overline{x})^2]}{n-1} \quad ..,(13)$$

مثـــــال 2 :

المطلوب تعيين التباين لمجموعة الارصاد الموجودة فى جدول (2).

الحـــــل :

الفئة Class Interval	مركز الفئة Class Midpoint x	التكرار (ت) Frequency f	x . f	$(x-\overline{x})$	$f.(x-\overline{x})$
60−62	61	6	366	−6.63	263.7414
63−65	64	15	960	−3.63	197.6535
66−68	67	40	2680	−0.63	15.8760
69−71	70	30	2100	2.37	168.5070
72−74	73	9	657	5.37	259.5321
Sum		100	6763		905.31

$$\overline{x} = \frac{[x.f]}{[f]} = 67.63$$

$$s^2 = \frac{[f.(x-\overline{x})^2]}{n-1} = \frac{905.31}{100-1} = 9.14$$

د) الانحراف المعيارى s : Standard deviation

وهو الجذر التربيعى للتباين ، أكثر المقاييس استعمالا وانتشارا ويعتبر أدقها .

$$s = \sqrt{s^2} \qquad ..,(14)$$

مثـــــال :

اوجد الانحراف المعيارى للتباينات 9.14, 0.056.

$s = \sqrt{0.056} = \pm 0.24$, $s = \sqrt{9.14} = \pm 3.02$

هـ) معامل الاختلاف : Coefficient of Variation

$$C.V = \frac{s}{\overline{x}} \qquad ..,(15)$$

حيثC.V : معامل الاختلاف ، s : الانحراف المعيارى ، $\overline{x}$:الوسط الحسابى .

ويستخدم لمقارنة النماذج المستنتجة كماسيأتى الحديث عنها فيمابعد .

مثـــــال :

معامل الاختلاف لعينة متوسطها 1.1 وتباينها 0.056 :

$$C.V = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{0.056}}{1.1} = 0.22$$

2 – نظرية الاحتمالات

Theory of Probability

1) مقدمة :

عند اجراء تجربة ما فإن نتيجة التجربة لايمكن التنبؤ بها وتسمى بالتجربة العشوائية ، من امثلة ذلك عند رمى زهر الطاولة فقد يكون الناتج أى رقم من 1 الى 6 . جميع النتائج المحتمل ظهورها تسمى فضاء العينة Sample Space ، ففضاء العينة فى حالة زهر الطاولة هو : $S=\{1 , 2 , \ldots\ldots 6\}$

وعند رمى قطعة نقود (رسم H أو الكتابة T): $S=\{H, T\}$

وفى حالة رمى قطعتى نقود فى نفس الوقت : $S=\{HH,HT,TH,TT\}$

ناتج التجربة العشوائية يسمى بالحدث Event .

2) احتمال وقوع الحدث x:

اذا كان المطلوب معرفة احتمال ظهور رقم ما وليكن 5 أى $P(5)$ عند رمى زهرة الطاولة مرة واحدة يساوى ناتج قسمة عدد اوجه الزهرة الموجود عليها الرقم 5 على عدد الاوجه الكلية لزهرة الطاولة $P(5)=\frac{1}{6}$ وبصفة عامة فإن :

$$P(x)=\frac{f}{n} \qquad ..,(16)$$

حيث $P(x)$: هو احتمال الحدث x ، f : عدد مرات تواجد x ،

n : عدد الاحداث الكلية (المتوقعة) .

مثـــــال :

المطلوب ايجاد احتمال ظهور الصورة H عند رمى قطعة نقود مرة واحدة ، وكذلك احتمال ظهور الصورة على قطعتى نقود القيتا فى نفس الوقت مرة واحدة .

الحـــــــل :

فضاء العينة فى الحالة الاولى : $s=\{H ,T\}$ ، H تمثل الصورة ، T تمثل الكتابة .

بالتعويض فى العلاقة (16) : $n=2$, $f=1$:

$$P(x)=\frac{f}{n}=\frac{1}{2}$$

فى الحالة الثانية :

S={HH , HT , TH , TT } ، f=1 , n=4 : $P(x)=\frac{1}{4}$

3) الحدث المضاد ($p(x^c)$:

هو احتمال عدم وقوع الحدث x وهو يساوى الواحد الصحيح مطروحا منه احتمال وقوع الحدث p(x) .

$$p(x)+p(x^c)=1 \quad ..,(17)$$

مثـــــــال:

المطلوب فى المثال السابق ايجاد احتمال عدم ظهور الصورة (H) لقطعة النقود الواحدة ، وكذلك احتمال عدم ظهور الصورة على قطعتى النقود عند رميهما مرة واحدة .

الحـــــل :

الحالة الاولى :من العلاقة (17):

$$p(x^c)=p(H^c)=1-p(x)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

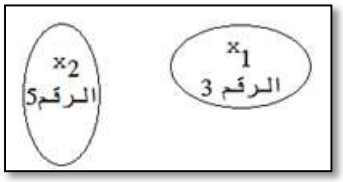
الحالة الثانية :

$$p(x^c)=P(HH)^c=1-p(x)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

4) الاحداث المستبعدة والغير مستبعدة :

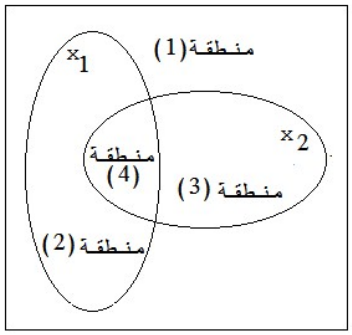
اذا كان لدينا حدثين x_1 , x_2 فقد يكونا حدثين :

أ – مستبعدين لبعضهما بمعنى عدم امكانية حدوثهما معا فى نفس الوقت مثل عدم امكانية ظهور الرقمين 5 ، 3 فى نفس الوقت عند رمى زهرة طاولة واحدة ، ويمكن تمثيل الحدثين كمافى شكل (5) .



شكل (5) : حدثين مستبعدين

ب – غير مستبعدين بمعنى امكانية حدوثهما فى نفس الوقت مثال ذلك عند رمى زهرتى طاولة فإن ظهور الرقم 3 على احداهما لايمنع ظهور الرقم 5 على الاخرى ويمكن تمثيلهما كمافى شكل (6).



شكل (6) : حدثين غير مستبعدين مستبعدين

فى شكل (6) اذا كان ناتج التجربة يقع فى المنطقة (1)فهذا يعنى أن الحدثين لايظهران (لايقعان) ، وفى المنطقة (2) يعنى ظهور الحدث الاول ، وفى المنطقة (3) يعنى ظهور الحدث الثانى ، بينما فى المنطقة (4) يعنى ظهور الحدثين معا فى نفس الوقت .

5) جمع الاحتمالات :

اذا كان لدينا حدثين x_1 ، x_2 غير مستبعدين لبعضهما فإن احتمال حدوث x_1 أو x_2 هو (قانون جمع الاحتمالات) :

$$p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) - p(x_1 x_2) \quad .., (18)$$

حيث $p(x_1 + x_2)$: احتمال حدوث الحدث الاول أو الثانى ،

$p(x_1)$: احتمال حدوث الحدث الاول $p(x_2)$: احتمال حدوث الحدث الثانى ،

$p(x_1 x_2)$: احتمال حدوث الحدثين معا .

يلاحظ أنه اذا كان الحدثين مستبعدين لبعضهما يكون : $p(x_1 x_2) = 0$ وتؤول العلاقة (18) الى :

$$p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) \quad .., (19)$$

6) ضرب الاحتمالات :

اذا كان x_1 ، x_2 حدثين مستقلين independent بمعنى أن حدوث احدهما لايؤثر على احتمال حدوث الآخر ، فإن احتمال حدوث الحدث x_1 والحدث الثانى x_1 فى نفس الوقت (قانون ضرب الاحتمالات):

$$p(x_1x_2) = p(x_1).p(x_2) \quad ..,(20)$$

مثـــال 1:

ماهو احتمال الحصول على2 أو 6 عند رمى زهرة طاولة ؟

الحـــل :

حيث أن ظهور الرقم 2 مستبعد لظهور الرقم 6، لذا تستخدم العلاقة(19) :

$$p(2+6) = p(2) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

مثـــال 2:

ماهو احتمال الحصول على 6 ، 6 عند رمى زهرتى طاولة مرة واحدة ؟

الحـــــل :

على الزهرة الاولى : $p(6) = \frac{1}{6}$

على الزهرة الثانية : $p(6) = \frac{1}{6}$

حيث أن ظهور الرقم 6 على الزهرة الاولى لايؤثر على ظهور الرقم 6 على الزهرة الثانية ، لذا يعتبر الحدثين مستقلين وتستخدم العلاقة (20) :

$$p(x_1x_2) = p(x_1).p(x_2)$$

$$p(6,6) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

7) الاحتمالات المشروطة : Conditional Probability

اذا كان المطلوب ايجاد احتمال وقوع الحدث x_1 اذا علم أن الحدث x_2 قد وقع فعلا ، يسمى بالاحتمال المشروط أى احتمال x_1 بشرط حدوث x_2 ويكتب على الصورة $p(x_1/x_2)$ ويمكن ايجاده من العلاقة :

$$p\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{p(x_1 x_2)}{p(x_2)} \quad ..,(21)$$

فلإيجاد احتمال سفر طالب بشرط نجاحه فى الامتحان

$$= \frac{\text{احتمال السفر والنجاح فى نفس الوقت}}{\text{احتمال النجاح}}$$

مثـــــال:

اذا كانت نتيجة اختبار نهاية العام كمايلى :

30%من الطلبة رسبوا فى الكيمياء ،20%من الطلبة رسبوا فى الطبيعة ،

15% من الطلبة رسبوا فى الكيمياء والطبيعة معا ،فإذا اختير أحد الطلبة عشوائيا:

1- مااحتمال رسوبه فى الطبيعة اذا رسب فى الكيمياء .

2 - مااحتمال رسوبه فى الكيمياء اذا رسب فى الطبيعة .

3 - مااحتمال رسوبه فى الكيمياء اذا نجح فى الطبيعة .

4 - مااحتمال نجاحه فى الطبيعة اذا نجح فى الكيمياء .

الحـــــل :

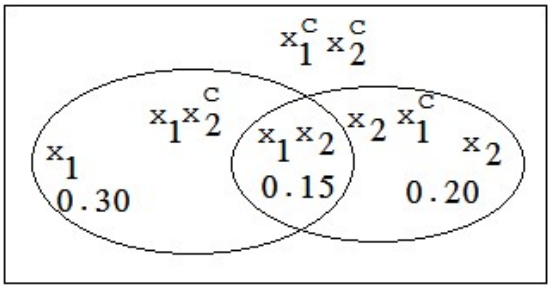
بفرض الرموز التالية :

رسوب فى الكيمياء x_1^c، ، نجاح فى الكيمياء x_1

رسوب فى الطبيعة x_2^c، ، نجاح فى الطبيعة x_2

رسوب فى الطبيعة والكيمياء $x_1^c x_2^c$، ، نجاح فيهما $x_1 x_2$

من شكل (7) وباستخدام الرموز المبينة :



شكل (7)

$$p(x_2/x_1) = \frac{p(x_2 x_1)}{p(x_1)} = \frac{0.15}{0.30} = 0.5$$
$$p(x_1/x_2) = \frac{p(x_1 x_2)}{p(x_2)} = \frac{0.15}{0.20} = 0.75$$
$$p(x_1/x_2^c) = \frac{p(x_1 x_2^c)}{p(x_2^c)} = \frac{0.30 - 0.15}{1 - 0.20} = 0.1875$$
$$p(x_2^c/x_1^c) = \frac{p(x_2^c x_1^c)}{p(x_1^c)} = \frac{1 - 0.3 - 0.2 + 0.15}{1 - 0.30} = 0.929$$

8) الاحداث المستقلة : Independent Events

يقال أن الحدثين x_1 ، x_2 مستقلين اذا كان احتمال الحدث x_1 مساويا لاحتمال حدوثه بشرط وقوع الحدث x_2 أى أن :

$$p(x_1) = p\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \qquad ..,(22)$$

فى حالة عدم التساوى يكون الحدثين x_1 ، x_2 غير مستقلين .

3 – التوزيعات الاحتمالية

Probability Distribution

1) مقدمة :

اذا كان لدينا متغير عشوائى x يمكن أن يأخذ القيم التالية بالاحتمالات المناظرة :

القيم : $x_1 , x_2 , \dots x_n$

بإحتمال : $p_1 , p_2 , \dots p_n$

ومجموع هذه الاحتمالات يساوى الوحدة

$$[p] = p_1 + p_2 + \dots p_n = 1 \quad .., (23)$$

وأن احتمال أى حدث يكون مساوى أوأكبر من الصفر .

$$p_i \geq 0 (i = 1,2, \dots . n) \quad .., (24)$$

تسمى العلاقة بين المتغير العشوائى واحتمال حدوثه بالتوزيع الاحتمالى .

اذا كان المتغير يأخذ قيما صحيحة لايوجد بها كسور سمى التوزيع بالتوزيع الاحتمالى المتقطع Discrete Dist^n. ، اما اذا أخذ أية قيمة على مقياس متصل بمعنى وجود كسور به سمى بالتوزيع الاحتمالى المتصل Continous Dist^n. .

لدراسة التوزيعات الاحتمالية يجب أخذ فكرة عن التباديل والتوافيق .

2) التباديل والتوافيق : Permutations &Combinations

بفرض وجود ثلاثة أندية A , B , C ترغب فى عمل دورى بينها ، عدد المباريات الممكنة فى هذه الحالة يمكن تحديده من الترتيب التالى :

AB , AC , BC , BA , CA , CB

فيكون عددها ستة مباريات ، وذلك باعتبار أن هناك مباراة بين A , B ومباراة أخرى بين A , B . عدد المباريات الذى نحصل عليه فى هذه الحالة يسمى بالتباديل Permutations . فى حالة اشتراط اختلاف أندية كل مباراة تكون عدد المباريات الممكنة فى هذه الحالة ثلاثة وهى : AB , AC , BC

وسمى العدد فى هذه الحالة بالتوافيقCombinations وهو شرط اختلاف أندية كل مباراة .

بصفة عامة اذا تواجد عدد n من العناصر ويراد ترتيبها فى مجموعات ومكونات كل مجموعة r عنصر فإن عدد الترتيبات :

$$^{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \quad ..,(25)$$

حيث $^{n}p_{r}$: عدد الترتيبات الممكنة من العناصر n بحيث يشمل كل ترتيب r عنصر بدون شرط اختلاف مكونات كل ترتيب (التباديل) ،

n! : مضروب n : n!=n(n−1)(n−2)..... 1

(n−r)! : مضروب (n−r) (n−r)!=(n−r)(n−r−1)(n−r−2) 1

أما فى حالة اشتراط اختلاف مكونات كل ترتيب عن الآخر يكون العدد:

$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\ .\ r!} = {}^{n}C_{n-r} \quad ..,(26)$$

حيث $^{n}C_{r}$: عدد الترتيبات الممكنة من العناصر n بحيث يشمل كل ترتيب r عنصر ، وبشرط اختلاف مكونات كل ترتيب (التوافيق) .

فى المثال السابق ذكره كان لدينا ثلاثة أندية (n=3) ، والمطلوب ايجاد عدد المباريات (المباراة مكونة من فريقين (r=2) :

فى حالة عدم اشتراط اختلاف أندية كل مباراة يكون العدد من العلاقة (25) :

$$^{n}p_{r} = {}^{3}p_{2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3x2x1}{1} = 6$$

وفى حالة اشتراط اختلاف أندية كل مباراة يكون العدد من العلاقة (26) :

$$^{3}C_{2} = \frac{3!}{(3-2)!\ 2!} = \frac{3x2x1}{1x2x1} = 3$$

يلاحظ مايلى :

1 – فى حالة زيادة قيمة المضروب يمكن استخدام العلاقة التقريبية :

$$n! = \sqrt{2\pi n}.\, n^n.\, e^{-n} \qquad .., (27)$$

$$\pi = 3.14, e = 2.78$$

مضروب 13 :

$$13! = \sqrt{2\pi(13)}.\, 13^{13}.\, 2.78^{-13} = 6.1872395x10^9$$

2 – مضروب الصفر يساوى الواحد 0!=1

3) التوزيعات الاحتمالية المتقطعة : Discrete Distributions

من أهم هذه التوزيعات توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون .

أ) توزيع ذى الحدين : Binomial Distribution

فى حالة وجود متغير عشوائى x وله قيمتين محتملتين فقط ، فإن هذا المتغير يتبع توزيعا يسمى بيرنولى Bernoulli . من أمثلة المتغير العشوائى هذا :

عند رمى قطعة نقود تكون النتيجة اما ظهور الصورة أو الكتابة ،

عند اختبار سلعة منتجة ما تكون النتيجة اما تالفة أو صالحة ،

نتيجة امتحان طالب تكون النتيجة اما نجاح أو رسوب ،

نوع المولود تكون النتيجة اما ذكر أو انثى .

يسمى احتمال احدى النتيجتين بإحتمال النجاح p والنتيجة الأخرى باحتمال الفشل q ويلاحظ أن مجموع الاحتمالين الواحد الصحيح .

$$p + q = 1 \qquad .., (28)$$

فإذا اجريت تجربة ما عدد n من المرات فإن التوزيع يسمى بتوزيع احتمالى لذو الحدين وذلك بفرض أن عدد المحاولات n مستقلة عن بعضها البعض .

بفرض أن احتمال النجاح p وأن احتمال الفشل q ، فإن احتمال الحصول على عدد من الوحدات الناجحة r من العدد الكلى للتجربة n هو :

$$p(r) = {}^{n}C_{r} \cdot p^{r} \cdot q^{n-r} \quad ; \quad r = 0,1,2,\ldots . n \qquad ..,(29)$$

والمتوسط الحسابى μ لعدد مرات النجاح :

$$\mu = n \cdot p \qquad ..,(30)$$

والتباين له :

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q \qquad ..,(31)$$

يستعمل توزيع ذى الحدين عادة عندما يكون حجم العينة n صغير .

مثـــــال:

رميت زهرة طاولة عدد n=4 ، فماهو احتمال الحصول على رقم 3 :

أ – صفر ، واحد ، اثنين ، ثلاث ، اربع مرات . ب – مرتين أو أقل .

جـ – أقل من مرتين . د – أكثر من مرتين . هـ – 3 مرات على الاكثر . و – على الاقل مرة واحدة .

الحـــــل :

نلاحظ هنا أن المتغير العشوائى هو ظهور الرقم 3 وحيث أن هناك ستة أوجه للزهرة فيكون احتمال الحصول على 3 :

$$p = \frac{1}{6} \ , \ \therefore q = 1 - p = \frac{5}{6} \ , \ n = 4$$

أ – من العلاقة (29) :

$$p(0) = {}^{4}C_{0} \left(\frac{1}{6}\right)^{0} \left(\frac{5}{6}\right)^{4-0} = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} \left(\frac{1}{6}\right)^{0} \left(\frac{5}{6}\right)^{4} = 0.4822$$

$$p(1) = {}^{4}C_{1} \left(\frac{1}{6}\right)^{1} \left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} = 0.3858$$

$$p(2) = 0.12 \ , \ p(3) = 0.02 \ , \ p(4) = 0.007$$

ب –

$$p(\text{مرتين أو أقل}) = p(2) + p(1) + p(0) = 0.9837$$

جـ –

$$p(\text{أقل من مرتين}) = p(1) + p(0) = 0.868$$

د –

$p(\text{اكثر من مرتين}) = p(3) + p(4) = 0.0163$

هـ –

$p(\text{3 مرات على الاقل}) = p(3) + p(4) = 0.0163$

و –

$p(\text{مرة واحدة على الاقل}) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1 - p(0) = 0.5178$

ب) توزيع بواسون الاحتمالى : Poisson Distribution

يعطى بالعلاقة :

$$p(r) = \frac{e^{-\mu}\mu^{r}}{r!} \quad ; \quad r = 0,1,2,\ldots\ldots \mu > 0 \qquad ..,(32)$$

الوسط الحسابى والتباين لتوزيع بواسون :

$$\mu = n.p \qquad ..,(33)$$

حيث p : احتمال النجاح ، n : عدد المحاولات .

$$\sigma^2 = \mu \qquad ..,(34)$$

يستعمل هذا التوزيع عندما يكون حجم العينة n كبير جدا بالنسبة للاحتمال p .

توزيع ذى الحدين يقرب من توزيع بواسون فى حالة تحقق الشرط :

$$n.p < 5 \qquad ..,(35)$$

مثـــــال:

فى مصنع لانتاج المعلبات اذا كان احتمال الفاسد 0.01 وذلك من الخبرة السابقة ، المطلوب حساب احتمال وجود علبة أوأقل فاسدة من عينة حجمها n=100 وذلك باستخدام توزيعى ذى الحدين وبواسون .

الحـــــــل:

(p , n= 100 فاسد=0.99 ,q=1−p ,0.01=)

توزيع بواسون :

$$\mu = n.p = 100x0.01 = 1 \qquad ..,(33)$$

الاحتمال المطلوب :

$$p = p(1) + p(0) = \frac{e^{-1}1^{1}}{1!} + \frac{e^{-1}1^{0}}{0!} = 0.736$$

توزيع ذى الحدين :

الاحتمال المطلوب من العلاقة (29) :

$$p = p(1) + p(0)$$
$$= {}^{100}C_1(0.01)^1(0.99)^{99} + {}^{100}C_0(0.01)^0(0.99)^{100} = 0.737$$

ويلاحظ تقارب نتيجتى التوزيعين لتحقق الشرط (14) .

4) التوزيعات الاحتمالية المتصلة : Continous Distributions

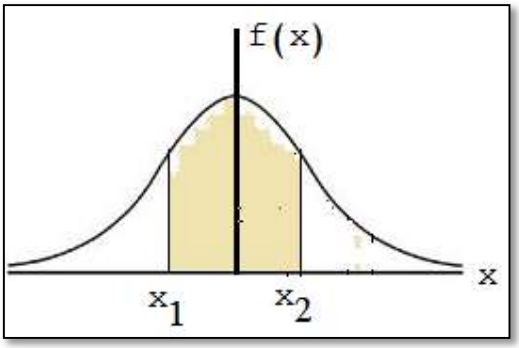
أ) التوزيع الاحتمالى العادى أو الطبيعى (منحنى جاوس) :

Gauss Probability Distribution Function (Normal Distⁿ.)

فى الجزء الاول من هذا الكتاب أوضحنا كيفية الحصول على المنحنى التكرارى ، فاذا نسبت التكرارات الى حجم العينة نحصل على المنحنى التكرارى النسبى وتكون المساحة الواقعة اسفله تساوى الوحدة . فى حالة زيادة حجم العينة الى مالانهاية يتحول المنحنى التكرارى الى المنحنى الاحتمالى العادى أو منحنى جاوس .

خواص المنحنى الاحتمالى العادى أو منحنى جاوس :

1 – له شكل الناقوس وهو متماثل حول المتوسط الحسابى كماهو مبين فى شكل (8) . فى الشكل يمثل المحور الأفقى قيم المتغير x والمحور الرأسى f(x) .



شكل (8): منحنى الاحتمال العادى

2 – معادلة المنحنى كماأوجدها جاوس :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad ..,(36)$$

حيث f(x) : دالة الكثافة الاحتمالية probability density function

μ: المتوسط الحسابى ، σ: الانحراف المعيارى (الخطأ التربيعى المتوسط)

e : الاساس اللوغاريتمى 2.71828 .

ويقال أن مجتمع ما يتبع التوزيع العادى ويوضع على الصورة : $N(\mu, \sigma^2)$

3 – المساحة أسفل منحنى توزيع جاوس (العادى) تمثل احتمال حدوث جميع الأخطاء وتساوى الوحدة .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1 \qquad ..,(37)$$

4 – ارتفاعات المنحنى عند أى نقطة f(x) لاتمثل الاحتمال ولكن المساحة هى الممثلة للاحتمال . فى شكل (8)

احتمال أن يقع المتغير x بين القيمتين x_1 ، x_2 هى المساحة تحت المنحنى بين القيمتين المذكورتين (المساحة المظللة فى الشكل).

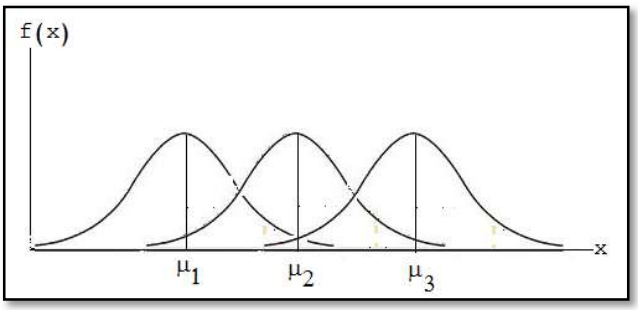
$$p(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx \qquad ..,(38)$$

واحتمال وقوع المتغير x خارج نطاق x_1 ، x_2 هو :

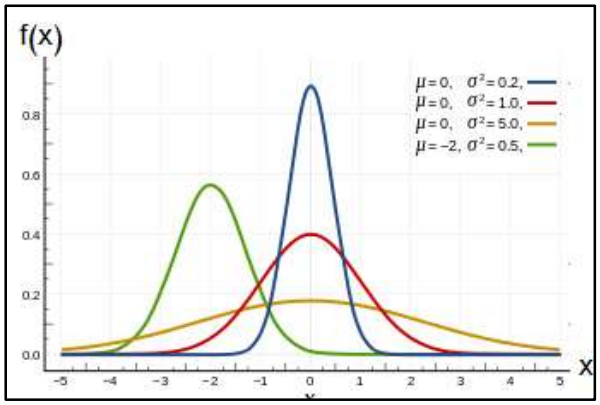
$$p(x_1 > x > x_2) = 1 - \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx \qquad ..,(39)$$

حيث أن المساحة الكلية تساوى الوحدة .

5 - من معادلة المنحنى العادى (36) نجد أن شكل المنحنى يختلف بإختلاف المتوسط الحسابى μ ، والانحراف المعيارى σ . شكل (9) يبين تأثير اختلاف المنحنى باختلاف المتوسط μ مع ثبات الانحراف المعيارى σ ، وفى شكل (10) يبين الاختلاف بتغير σ مع ثبات μ .



شكل (9)

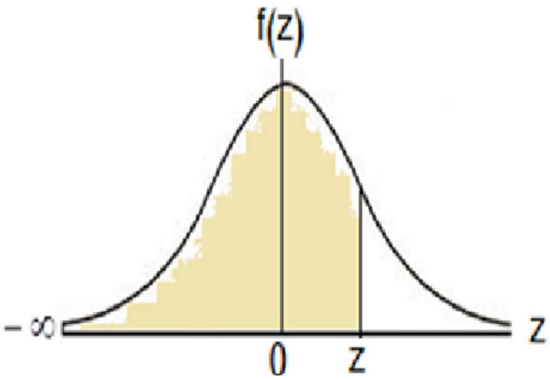


شكل (10)

6 – تم وضع جداول لحساب المساحات تحت المنحنى (الاحتمالات) وذلك لتوزيع عادى normal ذو متوسط حسابى مساوى للصفر وانحراف معيارى مساوى للوحدة $\mu = 0, \sigma = 1$ ، اطلق على هذا التوزيع بالتوزيع العادى القياسى Standard Normal Distⁿ $N(\mu, \sigma) = N(0,1)$. يلاحظ أنه لاستعمال هذه الجداول لأى توزيع آخر يختلف المتوسط والانحراف عن القيم المذكورة يلزم حساب مايسمى بالمتغير الموحد z أولا :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad .., (40)$$

وبذلك يكون محورى المنحنى كماهو مبين فى شكل (4).



شكل (11)

ومعادلة هذا المنحنى :

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad .., (41)$$

جدول التوزيع العادى القياسى المرفق فى نهاية المحاضرات يبين المساحات تحت المنحنى من قيمة z الى سالب مالانهاية (الجزء المظلل فى شكل 11) ، والامثلة التالية توضح كيفية استخدام هذه الجداول .

استعمال التوزيعات السابق ذكرها يكون كمايلى :

أ – اذا كانت n كبيرة ، $p\neq 0$, $p\neq 1$ $(0.3<p<0.7)$ ، يمكن تقريب ذى الحدين الى التوزيع العادى مع استخدام العلاقات السابق لإيجاد المتوسط والتباين لتوزيع بواسون.

$$\mu = n.p$$
$$\sigma^2 = \mu$$

ب – اذا كانت n كبيرة ، p تقرب من الصفر ، يستعمل توزيع بواسون .

جـ – اذا كانت n صغيرة ، يستعمل توزيع ذى الحدين .

مثال 1:

بإعتبار z القيمة الموحدة ، المطلوب حساب الاحتمالات التالية :

أ - $p(z<0)$, $p(z<2)$, $p(z<1)$ ، ب - $p(z>1, p(z>2), p(z>3)$

جـ – $p(0.5>z>0)$ ، $p(2.5>z>-1.5)$, $p(0.5>z>-0.5)$

د – $p(z<-1.5 \quad or \quad z>1.5)$

الحـــــل :

يجب التأكد أولا أن القيم الموجودة محولة الى القيم الموحدة كماهو موجود فى مثالنا هذا ، وكذلك التأكد من الاحتمالات الموجودة بالجدول لأقل من z .

أ – لقيمة z=1 من الجدول الاحصائية نحصل على الرقم 0.8413 وهذا يعنى أن احتمال أن z تكون أقل من 1 هو 0.841: $p(z<1)=0.841$ وبالمثل :

$$p(z<2)=0.9772 \quad , \quad p(z<0)=0.500$$

ب –

$$p(z>1)=1-0.8413=0.1587$$
$$p(z>2)=1-0.9772=0.0228$$
$$p(z>3)=0.0014$$

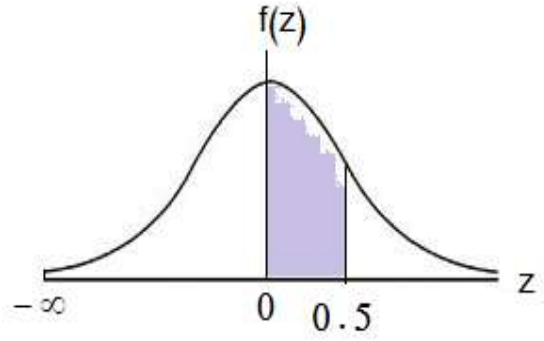
Areas under the normal curve

	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·(
0·0	·5000	·5040	·5080	·5120	·5160	·5199	·5
·1	·5398	·5438	·5478	·5517	·5557	·5596	·5
·2	·5793	·5832	·5871	·5910	·5948	·5987	·6
·3	·6179	·6217	·6255	·6293	·6331	·6368	·6
·4	·6554	·6591	·6628	·6664	·6700	·6736	·6
·5	·6915	·6950	·6985	·7019	·7054	·7088	·7
·6	·7257	·7291	·7324	·7357	·7389	·7422	·7
·7	·7580	·7611	·7642	·7673	·7703	·7734	·7
·8	·7881	·7910	·7939	·7967	·7995	·8023	·8
·9	·8159	·8186	·8212	·8238	·8264	·8289	·8
1·0	·8413	·8438	·8461	·8485	·8508	·8531	·8
1·1	·8643	·8665	·8686	·8708	·8729	·8749	·8
1·2	·8849	·8869	·8888	·8906	·8925	·8943	·8
1·3	·9032	·9049	·9066	·9082	·9099	·9115	·9
1·4	·9192	·9207	·9222	·9236	·9251	·9265	·9
1·5	·9332	·9345	·9357	·9370	·9382	·9394	·9
1·6	·9452	·9463	·9474	·9484	·9495	·9505	·9
1·7	·9554	·9564	·9573	·9582	·9591	·9599	·9
1·8	·9641	·9648	·9656	·9664	·9671	·9678	·9
1·9	·9713	·9719	·9726	·9732	·9738	·9744	·9
2·0	·9772	·9778	·9783	·9788	·9793	·9798	·9
2·1	·9821	·9826	·9830	·9834	·9838	·9842	·9

شكل (12)

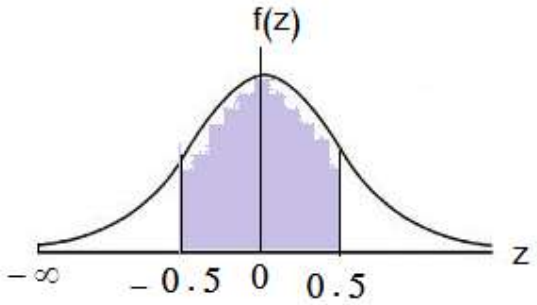
جـ – المطلوب : $p(0.5 > z > 0)$

برسم شكل للمنحنى العادى يكون المطلوب المساحة المظللة فى الشكل التالى :



$$p(z < 0) = 0.5, p(z < 0.5) = 0.6915$$
$$\therefore p(0.5 > z > 0) = 0.6915 - 0.5 = 0.1915$$

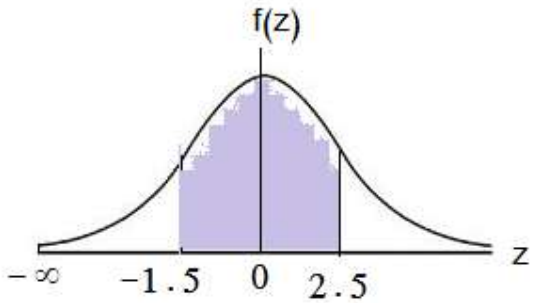
وبالمثل :



من الجداول ونتيجة لتماثل طرفى المنحنى :

$$p(z < 0.5) = 0.6915$$
$$p(0.5 > z > -0.5) = 2(0.6915 - 0.5) = 0.383$$

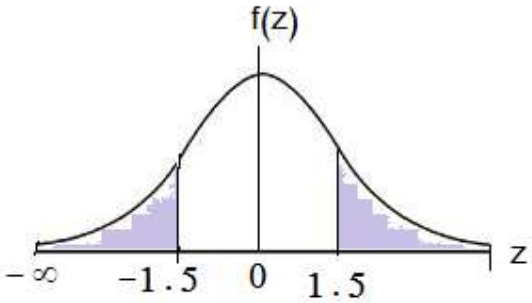
$p(2.5 > z > -1.5)$:



$$p(z < 2.5) = 0.9938, p(z < 1.5) = 0.9332$$
$$\because p(z < -a) = p(z > a) from symmetry$$
$$\therefore p(z < -1.5) = p(z > 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

$$\therefore p(2.5 > z > -1.5) = p(z < 2.5) - p(z < -1.5)$$
$$= 0.9938 - 0.0668 = 0.9270$$

p(z < −1.5 or z > 1.5) :



$$p(z < 1.5) = 0.9332, p(z > 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$
$$\therefore p(z < -1.5) = p(z > 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$
$$\therefore p = 0.0668 + 0.0668 = 0.1336$$

مثـــــال 2:

اذا كان المتوسط الحسابى μ والانحراف المعيارى لتوزيع ما σ، المطلوب حساب الاحتمالات التالية :

$$p(\mu+\sigma > x > \mu-\sigma)$$
$$p(\mu+2\sigma > x > \mu-2\sigma)$$
$$p(\mu+3\sigma > x > \mu-3\sigma)$$

الحـــــل:

يلزم تحويل القيم المذكورة الى القيمة الموحدة أولا وقبل استخدام الجداول ، من العلاقة (40):

$$z_{(\mu+\sigma)} = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma} = 1 \quad , \quad z_{(\mu-\sigma)} = -1$$
$$\therefore p(\mu+\sigma > x > \mu-\sigma) = p(1 > z > -1) = 2(0.8413 - 0.5) = 0.6826$$

وبالمثل :

$$z_{(\mu+2\sigma)} = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{(\mu+2\sigma)-\mu}{\sigma} = 2 \quad , \quad z_{(\mu-2\sigma)} = -2$$
$$\therefore p(\mu+2\sigma > x > \mu-2\sigma) = p(2 > z > -2) = 2(0.9772 - 0.5) = 0.9544$$
$$z_{(\mu+3\sigma)} = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma} = 3, z_{(\mu-3\sigma)} = -3$$

$$\therefore p(\mu+3\sigma > x > \mu-3\sigma) = p(3 > z > -3) = 2(0.9986 - 0.5) = 0.9964$$

مثـال 3 :

اذا كان متوسط مجموعة أرصاد μ=2.1 mm بإنحراف معيارى $\sigma = \pm$ 0.15 mm، اوجد احتمال أن تكون الرصدة أكبر من 2.55 mm .

الحـــــل :

$$z_{2.55} = \frac{2.55-2.1}{0.15} = 3$$
$$\therefore p(z > 3) = 1 - p(z < 3) = 1 - 0.9986 = 0.0014$$

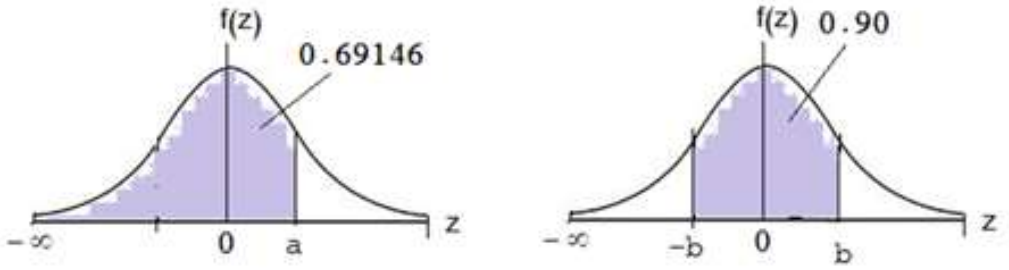
مثـــــــال 4:

المطلوب تعيين قيم a , b للحالتين :

$$p(z < a) = 0.69146, p(-b < z < b) = 0.9$$

الحـــــــل :

الحالة الاولى :



a=0.5 (from table)

الحالة الثانية :

$$p(z > b) = p(z < -b) = \frac{1 - 0.90}{2} = 0.05$$

$$p(z < b) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\therefore b = 1.65 \text{ (from table)}$$

ب) التوزيع العينى : The Sampling Distribution

فى البند السابق ذكرنا أن مفردات مجتمع ما ..... x_1, x_2 تتبع التوزيع العادى بمتوسط μ وانحراف معيارى σ أى أن : $N(\mu, \sigma^2)$. إذا أخذت عدة عينات من هذا المجتمع ذات حجم متساو n ، فيمكن الحصول على متوسطات هذه العينات :

..... , $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ وكذلك التباين لكل عينة..... $s_1^2, s_2^2, \ldots$. نلاحظ أن المتوسط يختلف من عينة لأخرى وكذلك التباينات . متوسطات العينات التى حصلنا عليها تتبع توزيعا ، كماأن التباينات التى حصلنا عليها تتبع توزيعا آخر

ب – 1) التوزيع العينى للمتوسطات :

المتوسطات التى حصلنا عليها تتبع توزيعا عاديا بمتوسط حسابى μ وهو المتوسط الحسابى للمجتمع بإنحراف معيارى :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad ..,(42)$$

حيث $\sigma_{\bar{x}}$الانحراف المعيارى لمتوسطات العينات ،

σ : الانحراف المعيارى للمجتمع ، n : حجم العينة .

أى أن التوزيع العينى للمتوسطات هو

$$N(\mu, \sigma_{\bar{x}}^2) \qquad ..,(43)$$

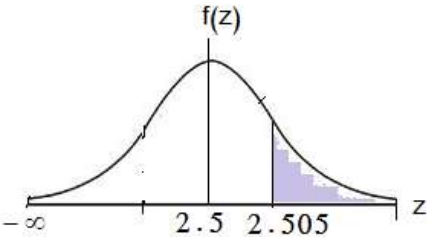
مثـــــال:

مصنع لإنتاج المواسير ينتج مواسير بمتوسط أقطار 2.5 cm وبإنحراف معيارى $\pm 0.009\ cm$ ، فإذا علم أن أقطار المواسير المنتجة تتبع التوزيع العادى ، فماهو التوزيع الذى تتبعه عينات مأخوذة بحجم n=9 ، احسب احتمال زيادة متوسط العينات عن 2.505 cm.

الحـــــل :

حيث أن التوزيع العادى هو مايتبعه المجتمع $N(\mu, \sigma^2) = N(2.5cm, \pm 0.009^2)$ ، فيكون التوزيع العينى توزيعا عاديا

$$N(\mu, \sigma_{\bar{x}}^2) = N(2.5cm, \frac{0.009^2}{9}) = N(2.5cm, 9x10^{-6}cm^2)$$



$$z_{2.505} = \frac{2.505 - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{2.505 - 2.5}{0.003} = 1.667$$

$$p(z > 1.667) = 1 - p(z < 1.667) = 1 - 0.9515 = 0.0485$$

ب – 2) التوزيع العينى للتباينات : The Sampling Distribution of s^2:

التباينات للعينات التى حصلنا عليها تتبع توزيعا يسمى χ^2 Chi – Squared ومعادلته :

$$\chi^2 = \frac{(n-1).s^2}{\sigma^2} \qquad ..,(44)$$

حيث σ^2 : تباين المجتمع ، s^2 : تباين العينات،

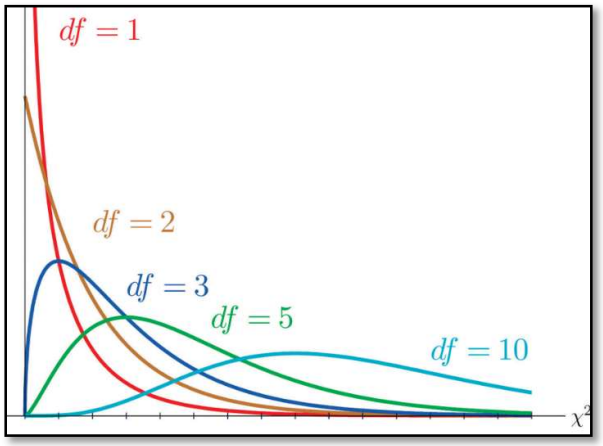
(n–1) : يطلق عليها درجة الحرية (ν , d.f degree of freedom).

يلاحظ أن :

1 – جميع قيم χ^2 موجبة وتتراوح من الصفر الى مالانهاية والمنحنى ملتو جهة اليمين كمافى الشكل (13) .

2 – هذا التوزيع يقترب من التوزيع العادى بزيادة درجة الحرية d.f كماهو مبين فى الشكل .

وتوجد جداول لهذا التوزيع (مرفقة فى نهاية المحاضرات) لدرجات الحرية المختلفة ويلاحظ فى هذه الجداول أن الاحتمالات المذكورة هى : $p(\chi^2 > \chi_1^2) = \alpha$

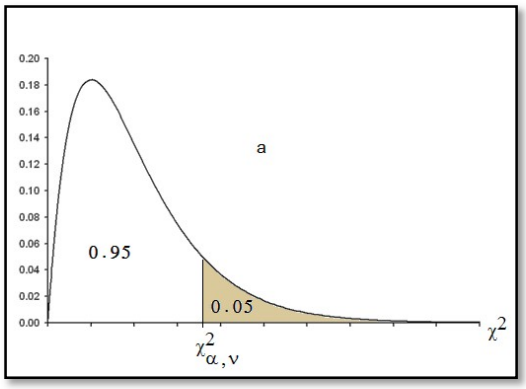


شكل (13): توزيع χ^2 وتأثير d.f على شكل المنحنى

مثـــال:

المطلوب تعيين القيم الحرجة فى الشكلين a , b

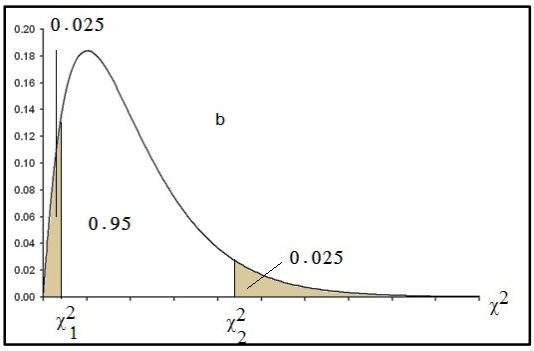
الشكل الاول (a) :



$$\nu = d.f = n - 1 = 10 \ , \qquad \chi^2_{.05,10} = 18.31$$

وهذا يعنى أن 0.95 (95%) من قيم χ^2 المحسوبة للعينات أقل من 18.31 واكبر من الصفر .

الشكل الثانى (b) :



$$\nu = d.f = n - 1 = 7,$$
$$\chi^2_1 = \chi^2_{1-.025,7} = \chi^2_{0.975,7} = 1.69$$
$$\chi^2_2 = \chi^2_{.025,7} = 16.01$$

وهذا يعنى أن 0.95 (95%) من قيمχ^2المحسوبة للعينات تقع بين χ^2_1 , χ^2_2 وأن

2.5% أقل من χ^2_1 ، وأن 2.5% أكبر من χ^2_2 .(انظر الشكل).

ب – 3) توزيع فيشر : FISHER (F– distribution)

فى حالة وجود توزيعين $\chi^2_{F_1}$, $\chi^2_{F_2}$ منفصلين عن بعضهما (independant) :

$$\chi^2_{F_1} = \chi^2_1 + \chi^2_2 + \ldots\ldots + \chi^2_{f_1} \quad ; \quad \chi_j \in N(0,1)\,, \quad j = 1,2,\ldots.n_1$$
$$\chi^2_{F_2} = \overline{\chi}^2_1 + \overline{\chi}^2_2 + \ldots\ldots + \overline{\chi}^2_{f_2} \quad ; \quad \overline{\chi}_j \in N(0,1)\,, \quad j = 1,2,\ldots.n_2$$

بمعنى أن كلا التوزيعين يتبعان التوزيع العادى (Normal dist.) بمتوسط $\mu = 0$ وانحراف معيارى $\sigma = 1$:

$N(\mu = 0, \sigma = 1)$ ، يمكن ايجاد النسبة بينهما كمايلى :

$$F_{F_1,F_2} = \frac{\chi^2_{F_1}}{\nu_1} : \frac{\chi^2_{F_2}}{\nu_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1} . \frac{\chi^2_{F_1}}{\chi^2_{F_2}} \qquad \ldots(45)$$

ويطلق على التوزيع الناتج بتوزيع Fisher Distribution ، وتوجد له جداول يمكن منها تعيين الاحتمالات المختلفة بمعلومية درجة المعنوية α ودرجتى الحرية $\nu_1 = n_1 - 1, \nu_2 = n_2 - 1$:

$$P\left(F_{F_1,F_2} \le F_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha}\right) = 1 - \alpha \qquad \ldots(46)$$

وسيأتى الحديث عن هذا التوزيع فيمابعد .

4 – التقديرات : Estimation

1 – مقـــــدمة :

الغرض من أخذ عينة (أوعدة عينات) من مجتمع ما هو تعيين المقاييس الاحصائية لها، من أهم هذه المقاييس الوسط الحسابى $\bar{x}$ والانحراف المعيارى s

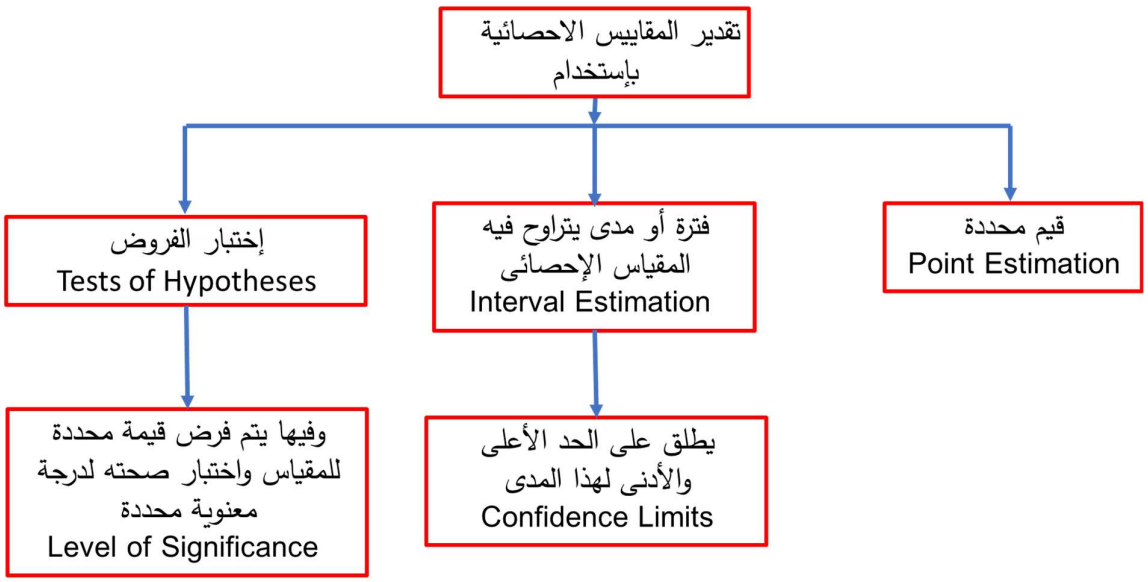
تقدير المقاييس الاحصائية هذه للمجتمع ككل يعتبر من المهام الاساسية لعلم الاحصاء .

يتم تقدير المقاييس الاحصائية باحدى الطرق التالية :

1 – تعيين قيم محددة Point Estimation

2 – تعيين فترة أو مدى يتراوح فيه المقياس الإحصائى Interval Estimation ، حيث يطلق على الحد الأعلى والأدنى لهذا المدى Confidence Limits .

3 – بإختبار الفروض Tests of Hypotheses حيث يتم فرض قيمة محددة للمقياس واختبار صحته لدرجة معنوية محددة Level of Significance كماهو مبين بالشكل التالى:



2) بعض القوانين الهامة للتوقع Expectation:

للمتغير العشوائى X والذى يمكن أن يأخذ القيم x_i بالاحتمالات p_i :

$$x_1, x_2, \dots x_n$$
$$p_1, p_2, \dots p_n$$

تكون القيمة المتوقعة للمتغير X (discrete random variable) :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p_i \qquad \dots (47)$$

وفى حالة مااذا كان المتغير X (continous variable) بمنحنى احتمالى f(x) فإن القيمة المتوقعة له :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x . f(x) . dx \qquad \dots (48)$$

وبصفة عامة اذا كان g(x) دالة فى المتغير العشوائى X فإن القيمة المتوقعة :

1 – للارصاد المنفصلة discrete random variable:

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) . p_i \qquad \dots (49a)$$

2 – للارصاد المتصلة continous variable:

$$E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) . f(x) . dx \qquad \dots (49b)$$

واذا كان هناك متغيرين عشوائيين X ، Y فإن :

$$E\big(g(X,Y)\big) = \sum_{x,y} g(x,y) . p(x,y) \qquad \dots (50a)$$

$$E(g(X,Y)) = \int_{x,y} g(x,y) . f(x,y) . dx . dy \dots (50b)$$

حيث $p(x,y)$: احتمال X=x ، Y=y ،

$g(x,y)$: دالة فى المتغيرين X ، Y ،

$f(x,y)$: الدالة الاحتمالية probability density function .

كماتصلح العلاقات التالية للتوقع :

$$E(bX + c) = \sum_{i=1}^{n} (bx_i + c) . p_i = b . E(X) + c \dots (51)$$

حيث b , c : ثوابت

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \qquad \dots (52)$$

حيث X , Y : متغيرين عشوائيين .

وبصفة عامة اذا كانت X_1 , X_2 , ... X_k متغيرات عشوائية فإن :

$$E(X_1 + X_2 + \dots . X_k) = E(X_1) + E(X_2) \dots . + E(X_k) \dots (53)$$

وبالنسبة للتباين variance فإن :

$$var(X) = E((x - \mu)^2) \dots (54)$$

$$var(cX) = c^2 . var(X) \dots (55)$$

اذا كان X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان :

$$E(XY) = E(X) . E(Y) \dots (56)$$

$$var(X + Y) = var(X) + var(Y) \dots (57)$$

وبصفة عامة :

$$var(X_1 + X_2 + \dots . X_k) = var(X_1) + var(X_2) + \dots var(X_k) \dots (12)$$

ويمكن استخدام العلاقات :

$$var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \dots (58)$$

$$var(X + c) = var(X) \dots (59)$$

حيث X: متغير عشوائى ، c : ثابت .

3) التقديرات المتحيزة والغير متحيزة : Biased and Unbiased Estimators

اذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع ذو توزيع عادى $N(\mu,\sigma^2)$ ، فإنه يمكن تقدير قيمة μ من متوسط العينة $\bar{x}$. القيمة التى تم تقديرها لمتوسط المجتمع يرمز لها بالرمز $\hat{\mu}$ ، وهناك حالتان :

1 – اذا كانت القيمة المقدرة مساوية للمجهول يكون التقديرغير متحيز unbiased،

2 – فى حالة عدم التساوى يكون التقدير متحيزا biased .

على ذلك يكون : $E(\hat{\mu}) = \mu$

ومن متوسط العينة $\overline{x}$: $E(\overline{x}) = \mu$

ويعتبر تقديرا غير متحيزا unbiased لمتوسط المجتمع μ.

والتقدير الغير متحيز ليس كافيا فى حد ذاته حتى نحكم على التقدير بأنه جيد ، فبالاضافة لذلك يجب أن يكون التوزيع العينى متقارب مع القيمة الحقيقية . لتوضيح ذلك اذا كان هناك تقديرين غير متحيزين للمتوسط الحسابى $\hat{\mu}_1$ ، $\hat{\mu}_2$ فيكون الاختيار بينهما للتقدير المصاحب لأقل تباين .

الكفاءة النسبية Relative Efficiency للتقدير $\hat{\mu}_2$ بالنسبة للتقدير $\hat{\mu}_1$ تعين من العلاقة :

$$R.E = \frac{var(\hat{\mu}_2)}{var(\hat{\mu}_1)} \quad ..,(60)$$

حيث R.E : الكفاءة النسبية وتتراوح قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح .

var ( ) : التباين لمابين القوسين ، $\hat{\mu}_1$ ، $\hat{\mu}_2$: تقديرين غير متحيزين للمجهول μ .

يلاحظ مايلى:

1 – يطلق على التقدير الغير متحيز والمصاحب لأقل تباين اسم "التقدير الغير متحيز ذو أقل تباين min variance unbiased estimator " .

2–التقدير ذو التحيز القليل والمصاحب لأقل تباين يكون أفضل من التقدير الغير متحيز والمصاحب لتباين كبير .

3 – يطلق على التقدير $\hat{\mu}$ التقدير المتناسق (consistency) للمجهول μ فى حالة توافر الشرطين:

أ – $E(\hat{\mu}) \to \mu \quad as \quad n \to \infty$

ب – $var(\hat{\mu}) \to 0 \quad as \quad n \to \infty$

4 – من النتائج الهامة الواجب التركيز عليها هو أنه لعينة عشوائية حجمها n مأخوذة من مجتمع ذو توزيع عادى $N(\mu, \sigma^2)$ فإن :

أ – متوسط العينة $\bar{x}$ يعتبر تقديرا غير متحيزا وله أقل تباين min variance unbiased للمجهول μ لأن :

$$E(\bar{x}) = \mu \quad ..,(61)$$

ب – تباين العينة s^2 يعتبر تقديرا غير متحيزا وله أقل تباين min variance unbiased للمجهول σ^2 لأن :

$$E(s^2) = E\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}\right) = \sigma^2 \quad ..,(62)$$

اما اذا كانت μ للمجتمع معلومة والمجهول هو σ^2 فإن :

$$E(s^2) = E\left(\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{n}\right) = \sigma^2 \quad ..,(63)$$

ويعتبر تقديرا غير متحيزا.

فى العلاقتين (62) ، (63) يطلق عل المقام "درجة الحرية degree of freedom" وهو عبارة عن عدد الارصاد المستقلة .

فى العلاقة (62) نلاحظ أن μ مجهولة وبالتالى تقارن الارصاد بمتوسط العينة $\bar{x}$ ، أى أن درجة الحرية قد فقدت واحد وعلى ذلك تكون درجة الحرية d.f (υ) :

$$d.f = \upsilon = n - 1 \qquad ..,(64)$$

حيث تقارن كل رصدة بعدد (n−1) من الارصاد المستقلة ، بينما نجد فى العلاقة (18) أن المتوسط الحقيقى للمجتمع μ معلوما وبذلك تقارن كل رصدة من الارصاد والتى عددها n بالمتوسط μ وتكون درجة الحرية فى هذه الحالة :

$$d.f = n \qquad ..,(65)$$

4) طرق التقدير الرقمى (المحددة برقم): Methods of Point Estimation

أ) طريقة العزوم : The method of Moments

يعرف العزم الرائى لمتغير عشوائى X حول نقطة الاصل كمايلى :

1− اذا كان المتغير X غير متصل (متقطع discrete):

$$m'_r(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^r}{n} = \sum x^r > p(x) = E(x^r) \qquad ..,(66)$$

2− اذا كان المتغير X متصل continous :

$$m'_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x).dx = E(x^r) \qquad ..,(67)$$

جدول (5) يبين العزوم المختلفة لقيم r المختلفة .

جدول (5) : العزوم حول نقطة الاصل لقيم r

r	$m'_r(x)$
0	1
1	$E(X) = \mu$
2	$E(X^2)$
3	$E(X^3)$

وبالمثل يمكن تعريف العزم الرائى حول المتوسط الحسابى كمايلى :
أ – اذا كان المتغير غير متصل discrete:

$$m_r(x) = \sum (x-\mu)^r . p(x) = E(x-\mu)^r = E(x-E(x))^r \quad ..,(68)$$

ب – اذا كان المتغير العشوائى X متصلا Continous فإن :

$$m_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r . f(x)dx = E(x-\mu)^r = E(x-E(x))^r \quad ..,(69)$$

جدول (6) يبين العزم حول المتوسط الحسابى لقيم r المختلفة :

جدول (6) : العزوم حول المتوسط الحسابى لقيم r

r	$m_r(x)$
0	1
1	0
2	$E(x-\mu)^2 = var. \quad ofx$

تعتمد طريقة العزوم على مساواة العزوم للعينة مع نظيراتها للمجتمع فنحصل على عدة معادلات فى المجاهيل المطلوب تقديرها . هذه الطريقة تعطى عادة تقديرات غير متحيزة ومتناسقة ، وفى بعض الاحيان تكون التقديرات متحيزة .

مثـــــال: اذا كانت الدالة f(x) فى المتغير العشوائى x :

$$f(x) = \begin{cases} = (k+1)x^k & \text{for } 0 \le x \le 1 \ , k > -1 \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ورصدت القيم التالية للمتغير x :

0.2 0.4 0.5 0.7 0.8 0.9 0.8 0.9

المطلوب تقدير قيمة k .

الحـــــل:

هناك مجهول واحد فى هذا المثال وهو k ، فيلزمنا تكوين معادلة واحدة يكون المجهول بها k .

بمساواة العزم الاول حول نقطة الاصل لكل من العينة المأخوذة والمجتمع نحصل على هذه المعادلة

العزم الاول حول نقطة الاصل (r=1) من العلاقة (66) :

$$m'_r(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^r}{n} = \frac{0.2 + 0.4 + \ldots\ldots + 0.9}{8} = 0.65 \qquad \ldots, (1)$$

وبالنسبة للمجتمع فتمثله الدالة f(x) ، نوجد العزم الاول حول نقطة الاصل باستعمال العلاقة (22) :

$$m'_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x).dx = \int_0^1 x.(k+1)x^k.dx$$

$$= \int_0^1 (k+1)x^{k+1}.dx$$

$$= [(k+1).\frac{x^{k+2}}{k+2}]_0^1$$

$$= \frac{k+1}{k+2} \qquad \ldots, (2)$$

بمساواة (1) ، (2) نحصل على : $\hat{k} = 0.857$

ب) طريقة ليكلهود : The method of maximum Likelihood

فى حالة وجود مجموعة من الارصاد $x_1 , x_2 , ... x_n$ ، يمكن الحصول على دالة ليكلهود باتباع الخطوات التالية :

1 – كتابة الاحتمال الرابط للارصاد joint probability :

$$L = p(x = x_1).p(x = x_2).....p(x = x_n)$$

2 – نوجد لوغاريتم الدالة L :

$$log(L) = log[p(x = x_1)] + log[p(x = x_2)] \dots\dots + log[p(x = x_n)]$$

3 – بتفاضل دالة اللوغاريتم تفاضل جزئى بالنسبة لكل مجهول ومساواتها بالصفر نحصل على عدة معادلات بعدد المجاهيل وبحلها نحصل على قيم المجاهيل .

مثـــــــال 1 :

اذا كان المطلوب تقدير لاحتمال النجاح p لتوزيع ذى الحدين السابق ذكره حيث اجريت عشرة محاولات نجح منها سبعة . احتمال نجاح عدد x من عدد مرات n=10 :

$$p(x) = {}^{n}C_x p^x q^{n-x} = {}^{10}C_x p^x (1-p)^{10-x}$$

والتعويض فيها بقيمة x = 7 نحصل على دالة ليكلهود :

$$L(p) = {}^{10}C_7 p^7 (1-p)^3$$

وبأخذ لوغاريتمات الطرفين :

$$log\, L\,(p) = log\, {}^{10}C_7 + 7\, log\, p + 3\, log\quad (1-p)$$

والتفاضل بالنسبة للمجهول p ومساواة الناتج بالصفر :

$$\frac{\delta\, log\, L\,(p)}{\delta p} = \frac{7}{p} + \frac{3}{1-p} = 0\,, \qquad \therefore \hat{p} = 0.7$$

مثـــــال 2:

اذا كانت الدالة f(x) فى المتغير العشوائى x :

$$f(x) = \begin{cases} = (k+1)\,x^k & \text{for } 0 \le x \le 1\ ,\ k > -1 \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ورصدت القيم التالية للمتغير x :

0.2 0.4 0.5 0.7 0.8 0.9 0.8 0.9

المطلوب باستعمال طريقة ليكلهود تقدير قيمة k .

الحـــــــل :

فى المثال المذكور توجد ثمانية ارصاد والاحتمال الذى يربط بينها :

$$L(k) = (k+1)x_1^k.(k+1)x_2^k.....(k+1)x_8^k$$
$$= (1+k)^8.x_1^k.x_2^k...x_8^k$$

بأخذ اللوغاريتمات :

$$log\,L\,(k) = 8\,log(\,k+1) + k\,log\,x_1 + k\,log\,x_2 \,\ldots\ldots + k\,log\,x_8$$
$$= 8\,log(\,k+1) + k.\left[\sum_{i=1}^{8} log\,x_i\right]$$

والتفاضل الجزئى بالنسبة للمجهول k ومساواة الناتج بالصفر :

$$\frac{\delta \log L(k)}{\delta k} = \frac{8}{k+1} + [\sum_{i=1}^{8} \log x_i] = 0 \quad , \quad \therefore \hat{k} = 0.89$$

وهو رقم قريب من القيمة المقدرة بطريقة العزوم ($\hat{k} = 0.857$).

5) التقدير بمجال (فترة) : Interval Estimation

فى البند السابق تم تقدير قيمة المجهول (أو المجاهيل) بتحديد قيمة (أو قيم) محددة . قد يكون هذا التقدير جيد وقد يبعد عن القيمة الحقيقية أى غير دقيق . للتغلب على ذلك يتم تعيين مجال أو فترة للتقدير يقع داخله المجهول (أو المجاهيل) وذلك باحتمال محدد يسمى بمجال الثقة Confidence Interval ، وتسمى حدود هذا المجال بحدود الثقة Confidence Limits.

أ) تحديد مجال الثقة للمتوسط الحسابى للمجتمع μ : Confidence Interval for μ

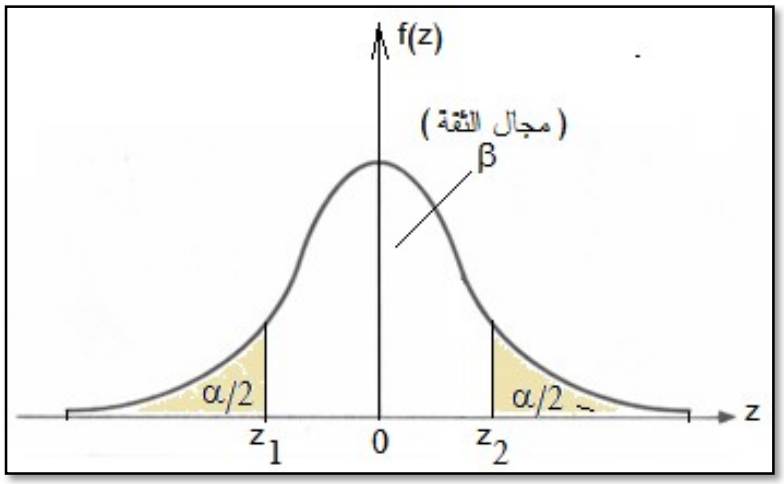
بفرض وجود عينة عشوائية حجمها n من مجتمع له توزيع عادى $N(\mu\,,\,\sigma^2)$ ، وكان متوسط العينة $\bar{x}$ ، والمطلوب تحديد مجال الثقة للمتوسط الحسابى للمجتمع μ وذلك فى الحالتين التاليتين :

1) اذا كانت σ للمجتمع معلومة :

يجب ملاحظة أننا نتحدث عن متوسط للعينة $\bar{x}$ لاعن متوسط لمفردات المجتمع μ ، فيكون التوزيع الذى يستخدم هو التوزيع العينى للمتوسطات .Mean Sampling dist والسابق بيانه ، ويكون التوزيع المستخدم فى هذه الحالة هو التوزيع العادى $N(\mu\,,\,\frac{\sigma^2}{n})$. نوجد المتغير الموحد z من العلاقة :

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \ldots(70)$$

وذلك لتحويل التوزيع العينى الى التوزيع العادى القياسى $N(0,1)$. ويتم تحديد قيمتين z_1 , z_2 تسميان بحدود الثقة Confidence Limits والجزء المحصور بينهما على منحنى الاحتمال العادى يسمى بمجال الثقة β Confidence Interval كماهو مبين فى شكل (14). بذلك يكون احتمال وقوع المتغير z بين هاتين القيمتين z_1 , z_2 مساويا للمساحة تحت المنحنى بينهما أى أن :



شكل (14) : مجال وحدود الثقة للمتوسط μ

$$P(z_1 < z < z_2) = \beta \qquad \ldots(71)$$

من العلاقتين (70) ، (71) تكون حدود الثقة :

$$z_1 < \quad z \quad < z_2 \quad ,$$

$$z_1 < \quad \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad < z_2$$

وتكون حدود الثقة $(z = z_2 = -z_1$:

$$\overline{x} \pm z.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(72)$$

وبذلك يقع متوسط المجتمع μ بين القيمتين المحددتين بالعلاقة (72) باحتمال (بثقة) β أو بمعنى آخر :

اننا على ثقة قدرها β أن متوسط المجتمع μ يقع فى المجال بين القيمتين $\overline{x} + z\,.\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ، $\overline{x} - z\,.\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

من ذلك نرى أن تحديد المعامل المطلوب μ يكون اكثر دقة كلما قلت فترة (مجال) الثقة β .

مثـــــال :

أخذت عينة عشوائية حجمها n = 25 من مجتمع له توزيع عادى $N(\mu, 16)$ وكان متوسط العينة $\overline{x} =$ 12.91 ، المطلوب تحديد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ لمجالى الثقة $\beta = 0.95$ ، $\beta = 0.99$.

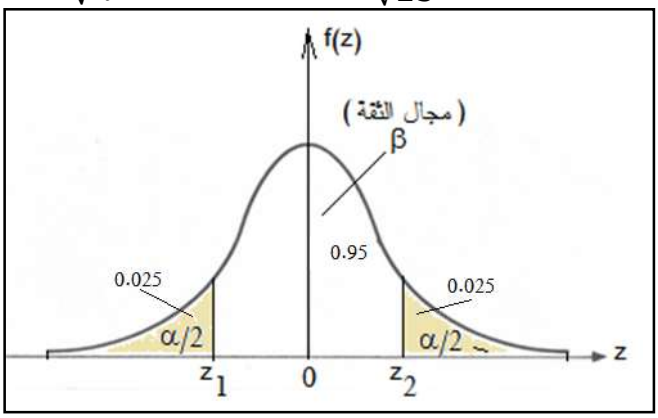
الحـــــــل :

لمجال الثقة $\beta = 0.95$: $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, $\alpha = 1 - \beta = 1 - 0.95 = 0.05$

من جداول التوزيع العادى Normal dist^{n}. : $z_1 = -z_2 = -1.96$

وبذلك تكون حدود الثقة (72) :

$$\overline{x} \pm z.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12.91 \pm 1.96\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = 12.91 \pm 1.57$$



أى أن μ تقع بين القيمتين :

$12.91 - 1.57 = 11.34$, $12.91 + 1.57 = 14.48$

$\therefore 11.34 < \mu < 14.48$

بدرجة ثقة 95% .

ولمجال الثقة 99% :

$$10.85 < \mu < 14.97$$

2) اذا كانت σ للمجتمع مجهولة :

فى كثير من الاحيان تكون σ للمجتمع مجهولة وتستعمل قيمة الانحراف المعيارى للعينة s كتقدير للانحراف المعيارى للمجتمع مع استعمال توزيع t(Student's dist^{n}.) والموجود ضمن الجداول الاحصائية وهو مرتبط بحجم العينة n حيث تستعمل درجة الحرية $\nu = n - 1$ للبحث عن الاحتمالات فى هذا التوزيع .

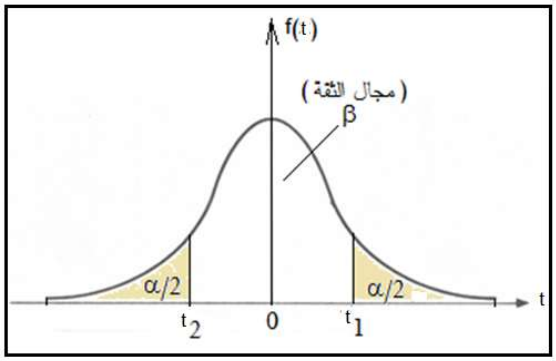
حدود الثقة للمتوسط الحسابى μ يمكن استنتاجها من الاحتمال :

$$P\left(t_1 < \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t_2\right) = \beta \qquad \dots(73)$$

حيث β : مجال الثقة ، t_1 , t_2 : حدى الثقة ، $\mu , \overline{x}$: متوسط العينة والمجتمع .

وبوضع $t = -t_2 = t_1$ تكون حدود الثقة (انظر الشكل التالى) :

$$\overline{x} \pm t . \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \dots(74)$$



جدول (7) يبين تأثير حجم العينة n على افتراض استعمال توزيعى t ، z .

من الملاحظ أنه اذا كانت حجم العينة صغير (اقل من 30) تختلف قيم t ، z ، بينما تتساوى اذا زاد حجم العينة الى ∞ ، من ذلك يمكن تقريب توزيع t الى التوزيع العادى z فى حالة زيادة حجم العينة الى 30 بالرغم من عدم معرفة الانحراف المعيارى للمجتمع σ كما فى العلاقة (74) .

جدول (7)

n	$\nu = n - 1$	t	z
5	4	4.604	2.575
10	9	3.250	2.575
15	14	2.977	2.575
20	19	2.861	2.575
30	29	2.756	2.575
∞	∞	2.576	2.575

مثـــــــال:

أخذت عينة عشوائية حجمها n = 8 من مجتمع ذو توزيع عادى وكان متوسط العينة $\overline{x} = 7.91$ والانحراف المعيارى لها s=0.67 ، والمطلوب تعيين حدود الثقة للمتوسط μ للمجتمع وذلك لمجال ثقة 0.95 .

الحـــــــل:

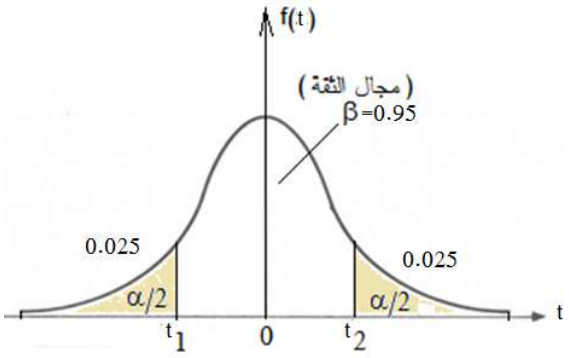
حيث أن انحراف المجتمع σ غير معلوم وحجم العينة أقل من 30 (n= 8) فيكون التوزيع المستعمل t – dist$^{n.}$.

$$t_{\frac{\alpha}{2},\ \nu} = t_{0.025,\ 7} = 2.365$$
$$t_2 = -t_1 = 2.365$$

من العلاقة (74) :

$$\overline{x} \pm t.\frac{s}{\sqrt{n}} = 7.91 \pm \frac{2.365x0.67}{\sqrt{8}}$$
$$= 7.91 \pm 0.561$$

أى أن μ تقع بين القيمتين 7.3489 ، 8.471 وذلك بمجال ثقة $\beta = 0.95$



ب) تحديد مجال الثقة للانحراف المعيارى: Confidence Interval for σ

لتحديد مجال الثقة للانحراف المعيارى للمجتمع نتبع الخطوات التالية :

1 – تختار درجة الثقة المطلوب تحققها$(\beta = 1 - \alpha = 95\%\ ,\ 99\%)$.

2 – يستعمل لتحديد مجال الثقة توزيع.dist^{n} $-\chi^2$:

$$\chi_1^2 < \frac{\nu.s^2}{\sigma^2} < \chi_2^2 \qquad \ldots(75)$$

حيث s^2 تباين العينة ، $\nu = n - 1$ درجة الحرية ، n : حجم العينة

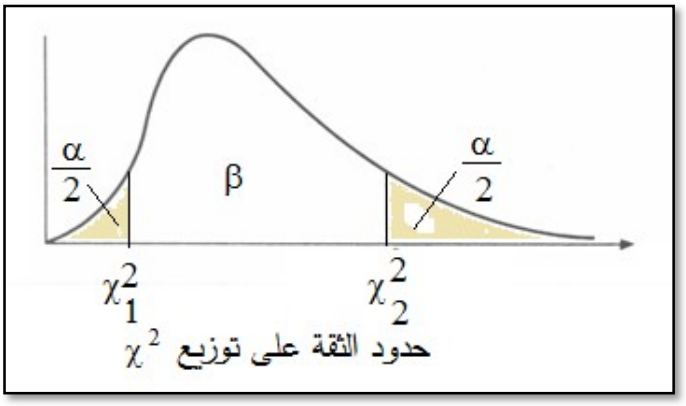
$\chi_1^2 = \chi^2_{\nu,\alpha/2}$ ، $\chi_1^2 = \chi^2_{\nu,(1-\alpha/2)}$

وذلك باحتمال أو بمجال ثقة β أى أن : (انظر الشكل)

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{\nu.s^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = \beta \qquad \ldots(76)$$

من العلاقة (76) يمكن تحديد حدود الثقة Confidence Limits كمايلى :

$$Confid\left(\frac{\nu.s^2}{\chi_2^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\nu.s^2}{\chi_1^2}\right) \qquad \ldots(77)$$



مثـــــال:

من الارصاد التالية لقياس مسافة ما عدة مرات المطلوب تعيين مجال الثقة للانحراف المعيارى σ وذلك لدرجة معنوية $\alpha=0.05$.

	l (m)	v (mm)	v^2
	146.423	−0.0119	0.000142
	146.422	0.2891	0.083579
	146.458	0.0531	0.00282
	146.389	.	.
	146.425	.	.
	146.489	.	.
	146.433	.	.
	146.482	.	.
	146.466	.	.
	146.424	.	.
sum	1464.411	0	0.008897

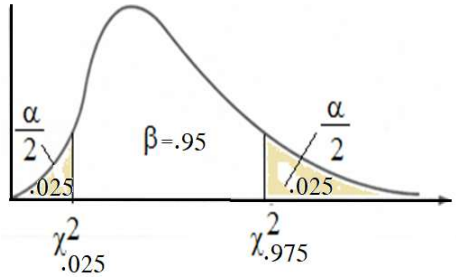
$$s = \sqrt{\frac{0.008897}{10-1}} = \pm 0.03144m = 31.144mm$$

from (77) $\quad \nu = n - 1 = 9$

$\chi^2_{.025}$ =2.7 , $\chi^2_{.975}$ =19.02

$$\therefore p\left(\frac{s^2 . \upsilon}{\chi^2_{.975}} \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2 . \upsilon}{\chi_{2.025}}\right) = \beta$$

$$\therefore p\ (\ 4.68 \leq \sigma^2 \leq 32.95\ ) = 0.95$$



حدود الثقة على توزيع χ^2

جـ) تحديد مجال الثقة لنسبة ما: Confidence Interval of a proportion

لتحديد مجال الثقة لنسبة ما p (نسبة نجاح ، نسبة زيادة السكان ، ...) نوجد المتوسط الحسابى μ_p والانحراف المعيارى σ_p من العلاقتين :

$$\mu_p = p \qquad \ldots(78)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p.q}{n}} \qquad \ldots(79)$$

حيث : $q = 1 - p$ ، n : حجم العينة .

يستعمل التوزيع العادى z . Normal dist^n (فى حالة عدم قرب النسبة p من الصفر أو الواحد الصحيح).

حدود الثقة :

$$\mu_p \pm z.\sigma_p \qquad \ldots(80)$$

مثـــــال :

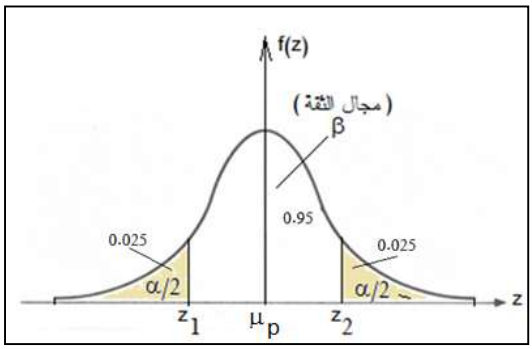
اجرى استفتاء على عينة عشوائية من مالكى السيارات حجمها n = 800 فكان عدد الموافقين على قانون المرور الجديد 480 ، اوجد حدود الثقة لنسبة الموافقين وذلك بدرجة ثقة 0.95 .

الحـــــل :

من العلاقتين (78) ، (79) :

$$\mu_p = \frac{480}{800} = 0.6 \quad , \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0.6x0.4}{800}} = 0.017$$

من الشكل التالى والجداول الاحصائية (توزيع z):



$$z = z_2 = -z_1 = 1.96$$

وتكون حدود الثقة : (العلاقة (80))

$$\mu_p \pm z.\sigma_p = 0.6 \pm 1.96x0.017 = 0.6 \pm 0.034$$

والقيمتين هما 0.634 ، 0.566 ، وهذا يعنى أن نسبة الموافقين على القانون الجديد تقع بين 63.4% ، 56.6% وذلك بثقة قدرها 95%.

د) تحديد مجال الثقة للنسبة بين انحرافين معياريين $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$:

ويمكن استنتاج :

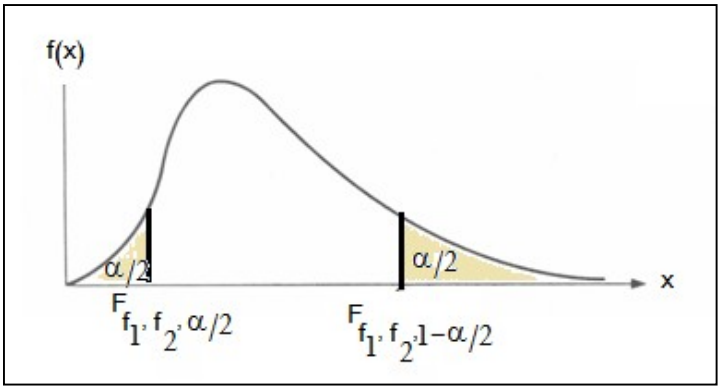
$$F_{f_1,f_2} = \frac{\nu_2}{\upsilon_1} \cdot \frac{\upsilon_1 . s_1^2 . \sigma_2^2}{\upsilon_2 . s_2^2 . \sigma_1^2} = \frac{s_1^2 . \sigma_2^2}{s_2^2 . \sigma_1^2}$$

$$if \quad q = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad ; \quad \sigma_2 = q . \sigma_1$$

$$\therefore F_{f_1,f_2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad ; \quad if \quad \sigma_1 = \sigma_2$$

ويكون مجال الثقة للنسبة (Confidence Interval for q) (انظر الشكل) :

$$P\left(\frac{s_1}{s_2} \sqrt{F_{\nu_2,\nu_1,\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq \frac{s_1}{s_2} \sqrt{F_{\nu_2,\nu_1,\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \right) = 1 - \alpha \ldots, (81)$$



من الممكن استخدام العلاقات التالية بالنسبة لتوزيع فيشر والتى تبين العلاقة بينه وبين توزيعات t , χ^2 :

$$F_{\nu_1,\nu_2,p} = \frac{1}{F_{\nu_2,\nu_1,(1-p)}}$$

$$F_{1,\nu,(1-p)} = t^2_{\nu,1-(p/2)} \quad \ldots(82)$$

$$F_{\nu,\infty,p} = \frac{\chi^2_{p,\nu}}{\nu}$$

مثـــــــال:

قيست زاوية ما بواسطة مجموعتين من الراصدين وكانت النتائج كمايلى :

groupe I : $n_1 = 16$, $s_1 = \pm 0.47''$,

groupe II : $n_2 = 7$, $s_2 = \pm 0.69''$

والمطلوب تعيين مجال الثقة للنسبة $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ (النسبة بين انحرافى المجتمعين) وذلك لدرجة معنوية $\alpha = 0.05$ وبين هل من الممكن تساوى الانحرافيين σ_1 , σ_2 .

الحـــــــــل :

$\nu_1 = n_1 - 1 = 15$, $\nu_2 = n_2 - 1 = 6$, $\alpha/2 = 0.05$

$F_{6,15,0.025} = 0.190$, $F_{6,15,0.975} = 3.41$

$for\ \beta = 0.95$:

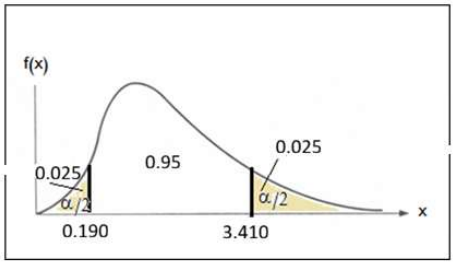
$$p\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{0.975}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{0.025}}\right) = 0.95$$

$$P\left(\frac{0.47^2}{0.69^2}\cdot\frac{1}{3.41} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{0.47^2}{0.69^2}\cdot\frac{1}{0\ .190}\right) = 0.95$$

$$p\left(0.136 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 2.442\right) = 0.95$$

$$P(\,0.369 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq 1.563\,) = 0.95$$

ومنها نستنتج امكانية تساوى القيمتين : $\therefore \sigma_1 = \sigma_2 \;;\; \because \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$



جدول (8) يبين مجالات الثقة للمعاملات المختلفة والسابق ذكرها .

جدول (8) : حدود الثقة Confidence Interval

Parameter			Dist^n.	Confidence Limits
μ	σ known		z	$\overline{x} \pm z.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	σ unknown	n < 30	t	$\overline{x} \pm t.\frac{s}{\sqrt{n}}$
		n > 30	z	$\overline{x} \pm z.\frac{s}{\sqrt{n}}$
ratio p	$\mu_p = p\,, q = 1-p$ $\sigma_p = \sqrt{\frac{p.q}{n}}$		z	$\mu_p \pm z.\sigma_p$
σ^2	$\nu = n-1$		χ^2	$for\ \beta = 0.95$: $\frac{v.s^2}{\chi^2_{0.975}} < \sigma^2 < \frac{v.s^2}{\chi^2_{0.025}}$
ratio $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\nu_1 = n_1 - 1$ $\nu_2 = n_2 - 1$		F	$for\ \beta = 0.95$: $\frac{s_1^2}{s_2^2}.\frac{1}{F_{0.975}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2}.\frac{1}{F_{0.025}}$

n:sample size , $\nu = n-1$ degree of freedom, β: confidence degree , $\alpha = 1-\beta$.

5 – اختبارات الفروض Tests of Hypothesis

1) مقدمة :

من المشاكل الهامة التى تواجه المهندس محاولة تحسين نوع معين من الصناعات ، وحيث أن عمليات التحسين هذه تكون فى كثير من الاحيان مكلفة للغاية فيجب فى البداية اختبار فرض أنه سيكون هناك تحسن فعلى قبل اجراء عملية التحسين . مثال ذلك نفرض أن قوة الشد لأسياخ الحديد المنتجة حاليا من مصنع ما لها توزيع عادى بمتوسط μ_o وانحراف معيارى σ ، وأخذت عينة من المصنع حجمها n سيخ منتجة بطريقة أخرى وكان متوسط الشد لها $\bar{x}$ وبفرض عدم تغير الانحراف المعيارى . على المهندس فى هذه الحالة أن يقرر هل الفرق بين المتوسطين $\mu_o, \overline{x}$ كاف لمواصلة الانتاج بالطريقة الجديدة وبمعنى آخر هل الفرق الظاهر بين المتوسطين فرق معنوى نتيجة تغير طريقة الانتاج أم أن هذا الفرق غير معنوى أى أنه ناتج من الصدفة نتيجة اختيار العينة بطريقة عشوائية ، يسمى الاختبار الذى يجرى باختبار الفروض .

من جهة أخرى اذا كان مصنع ما يدعى أن انتاجه ذات متوسط μ ، فيجب اختبار صحة هذا الادعاء قبل شراء هذا المنتج وذلك بأخذ عينة من الانتاج وايجاد مقاييسها الاحصائية $s, \overline{x}$ ويجرى اختبار الفروض لتقرير مإذا كان ادعاء المصنع صحيحا (بمعنى قبوله) أو غير صحيح (أى رفضه) .

2) الفرض الصفرى (العدم) H_0 والفرض البديل H_1 :

Null Hypothesis H_0 and Alternative Hypothesis H_1:

فى كثير من الاحيان يرمز للفرض المراد اختباره بالرمز H_0 ويسمى بالفرض الصفرى ، وأى فرض آخر خلاف ذلك يسمى بالفرض البديل H_1 . يجب ملاحظة :

1 – الفرض الصفرى صحيح حتى نحصل على نتائج عكس ذلك .

2 – لايمكن أن يكون الفرضين الصفرى والبديل صحيحين فى نفس الوقت ، بمعنى أنه اذا أثبتت النتائج أن الفرض الصفرى صحيح فهذا يعنى عدم صحة الفرض البديل والعكس صحيح .

لتوضيح ماسبق نفرض أن مصنع لإنتاج المسامير يدعى صاحبه أن أقطار المواسير المنتجة بمتوسط μ_0 ولإختبار ذلك أخذت عينة حجمها n فكان متوسط أقطارها $\overline{x}$

وهى قيمة تقديرية لمتوسط انتاج المصنع μ . فى هذه الحالة نضع الفرضين الصفرى والبديل كمايلى :

الفرض الصفرى هو أنه لايوجد فرق بين μ_0, μ أى أن :

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad .., (83a)$$

μ_0. أكبر أوأصغر منμالفرض البديل هو أنه يوجد فرق بينهما بمعنى أنه قد تكون

$$H_1: \mu \neq \mu_0 \qquad .., (83b)$$

وفى حالة المثال المذكور لعملية تحسين الانتاج يكون الفرض الصفرى :

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \qquad .., (84a)$$

بمعنى أنه لايوجد فرق بين متوسط الاسياخ المنتجة سواء بالطريقة القديمة أو الحديثة ، ويكون الفرض البديل فى هذه الحالة :

$$H_1: \mu > \mu_0 \qquad .., (84b)$$

أى أن الطريقة الحديثة تنتج أسياخ بقوة شد أكبر من المنتجة بالطريقة القديمة .إذا دلت النتائج على قبول الفرض الصفرى فهذا يعنى بالتبعية رفض الفرض البديل بمعنى أنه لايوجد تحسن فى عملية الانتاج والعكس صحيح .

يختار الفرضين الصفرى والبديل كمايلى :μ_0 أقل من μإذا كان المطلوب اختبار فرض أن

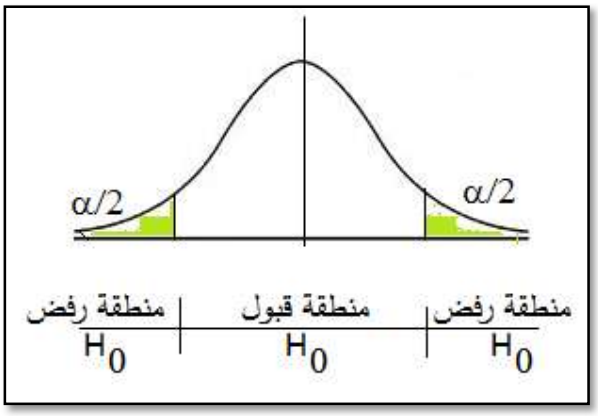
$$H_0: \mu \geq \mu_0 \qquad .., (85a)$$

$$H_1: \mu < \mu_0 \qquad .., (85b)$$

،(85) هى كل الحالات الممكنة لوضع الفرضين الصفرى والبديل فى اختبارات (84) ، (83)العلاقات الفروض . بعد وضع الفرضين الصفرى والبديل يحسب المقياس الاحصائى المختبر وتعين حدود القبول والرفض ثم فى حالة وقوع المقياس الاحصائى فى منطقة القبول أو رفضه اذا وقع المقياس H_0يتخذ القرار سواء بقبول الفرض الاحصائى فى منطقة الرض كماسيتم بيانه لاحقا .

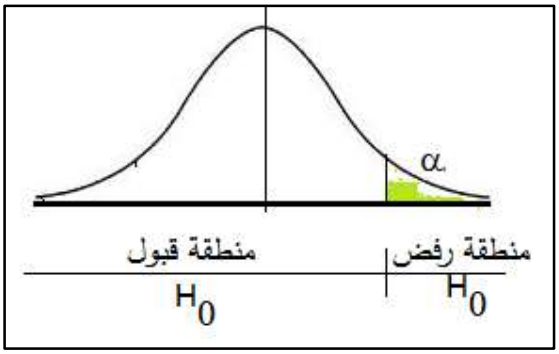
3) مناطق القبول والرفض للفرض الصفرى H_0:

يسمى الاختبار (83) بإختبار من الجهتين Two-tailed test ، حيث أنه وكماهو واضح من الفرض البديل (83 b) أنه قد تكون μ أكبر (أو أصغر) من μ_0 فتتحدد مناطق القبول والرفض كماهو موضح فى شكل (15) .



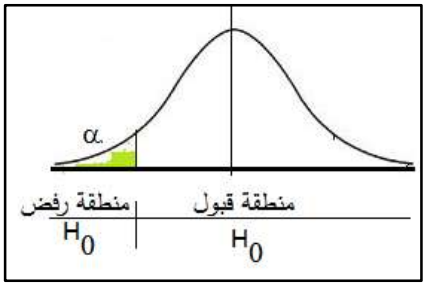
شكل (15)

شكل (16) يبين مناطق القبول والرفض للفرض (84) حيث تتحدد منطقة الرفض فى جهة واحدة فقط (جهة اليمين) One-tailed test .



شكل (16)

شكل (17) يبين مناطق القبول والرفض للفرض (85) حيث تتحدد منطقة الرفض فى جهة واحدة (جهة اليسار).



شكل (17)

ويلاحظ مايلى :

1 – مناطق الرفض والقبول فى الاشكال السابقة حددت بفرض أن التوزيعات احتمالية عادية .Normal dist[n].

2 – المساحة تحت المنحنى الاحتمالى فى منطقة الرفض فى كل حالة على حدة مساوية لدرجة المعنوية significance level ففى حالة وجود منطقتى رفض كما فى شكل (15) تكون المساحة فى كل جهة مساوية $\alpha/2$ أما فى حالة وجود منطقة رفض واحدة كمافى شكلى (16) ، (17) تكون المساحة عندها مساويةα .

3 – درجة المعنوية α غالبا ماتكون 0.05 أو 0.01 ويتوقف ذلك على درجة المخاطرة أو الاضرار الناتجة عن قبول أو رفض الفرض الصفرى .

4 – اذا رفض الفرض الصفرى H_0 عند درجة معنوية $\alpha = 0.05$ يقال أن الفرق المختبر فى مثالنا "معنوى " ، واذا رفض نفس الفرض عند درجة معنوية $\alpha = 0.01$ أيضا يقال أن الفرق "معنوى جدا" .

5 – الحدود الفاصلة بين مناطق القبول والرفض للفرض الصفرى تسمى بالحدود الحرجة Critical Limits والقيم عندها على المحور الافقى تسمى بالقيم الحرجة Critical Values وتحدد هذه القيم من الجداول الاحصائية للتوزيعات الاحتمالية العادية .

6 – اذا كان الانحراف المعيارى للمجتمع σ معلوم تعين القيم الحرجة من جداول التوزيع العادى z ويكون المقياس المختبر :

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad ..,(86a)$$

7 – أما اذا كان الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معلوم ، يعين الانحراف المعيارى للعينة s وتستعمل كتقدير غير متحيز لإنحراف المجتمع σ وتعين القيم الحرجة من جداول التوزيع t وذلك اذا كان حجم العينة أقل من 30 ويكون المقياس المختبر :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \qquad ..,(86b)$$

وفى حالة زيادة حجم العينة عن 30 يستعمل توزيع z .

4 P–value (Sig.) :

في الإحصاء، القيمة الاحتمالية (p-value) **هي** مقياس يساعد على تحديد ما إذا كانت النتائج التى حصلنا عليها من التجارب العملية قد حدثت بالصدفة أم أنها تشير إلى وجود أثر أو فرق حقيقي.
وفيه تكون الفرضيات كمايلى :

الفرض الصفرى هو أنه لايوجد فرق أو تأثير .

الفرض البديل هو أنه يوجد فرق أو تأثير .

لمستوى الدلالة $\alpha = 0.05$:

إذا كانت $p\text{-value} \leq 0.05$: ترفض الفرضية الصفرية بمعنى وجود تأثير (الفرق ذات دلالة إحصائية) .
أما إذا كانت $p\text{-value} > 0.05$: نقبل الفرضية الصفرية حيث لا توجد أدلة إحصائية كافية لإثبات وجود فرق أو تأثير.

مثـــــــال:
اذا كان المطلوب اختبار طريقة تدريس جديدة بالطريقة المتبعة (القديمة) وكانت :

الفرض الصفرى H_0 : لايوجد فرق أو تأثير بين الطريقتين .

الفرض البديل H_1 : يوجد فرق أو تأثير بين الطريقتين .

فإذا جريت التجربة على مجموعتين من الطلاب، ثم استخدم اختبارًا إحصائيًا (t مثلا) فكانت النتائج:
متوسط درجات المجموعة التقليدية = 70

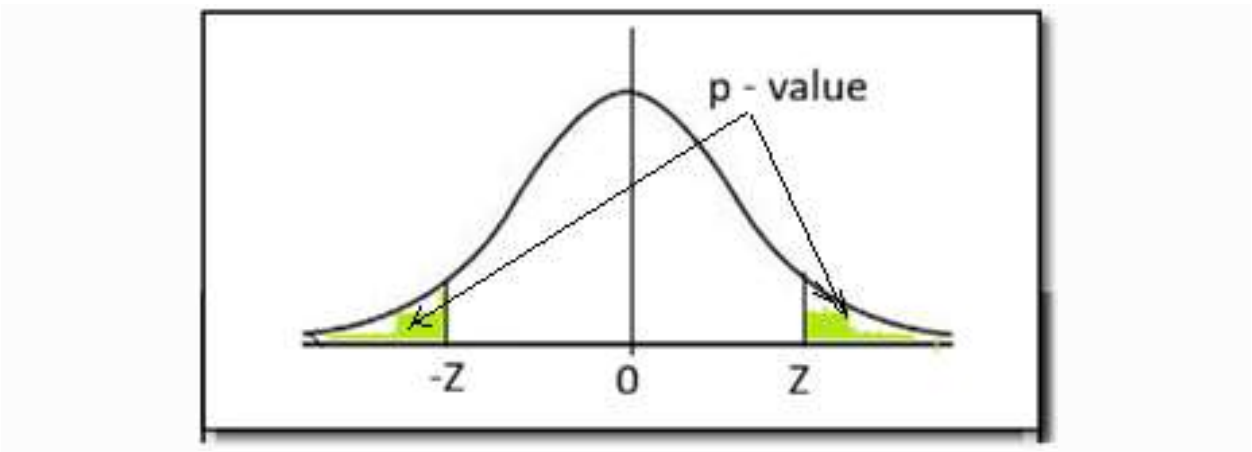
متوسط درجات المجموعة الجديدة = 78

وكانت قيمة p-value = 0.02

القيمة 0.02 تعني أنه إذا كانت الفرضية الصفرية صحيحة فعلًا (أي لا يوجد فرق بين الطريقتين)، فإن احتمال الحصول على فرق مثل هذا أو أكبر بسبب الصدفة هو 2% فقط.
وحيث أن $0.02 < 0.05$ ، فإننا نرفض الفرضية الصفرية ونستنتج أن هناك فرقًا ذا دلالة إحصائية بين الطريقتين، وأن الطريقة الجديدة تبدو أكثر فاعلية.

القاعدة هى:

- $p \leq 0.05$ النتيجة ذات دلالة إحصائية : يرفض الفرض الصفرى H_0 .
- $p > 0.05$ النتيجة غير ذات دلالة إحصائية : عدم رفض الفرض الصفرى H_0 .



$$p - value = 2P(z > Z) \quad .., \qquad (87)$$

وسيتم الحديث عن ذلك تفصيلا فى بعض الامثلة التالية .

الحالات المختلفة لاختبارات الفروض

1 – اختبار الفروض على متوسط عينة

مثـــــال 1:

مصنع لانتاج أسياخ الحديد يدعى أن انتاجه للاسياخ بمتوسط لايختلف عن 20 mm، أخذت عينة من انتاجه مكونة من100 سيخ فكان متوسط أقطارها 19.80 mm . المطلوب اختبار ادعاء المصنع عند درجتى معنوية 5% , 1% اذا علم أن الانحراف المعيارى للانتاج كله هو 2 mm.

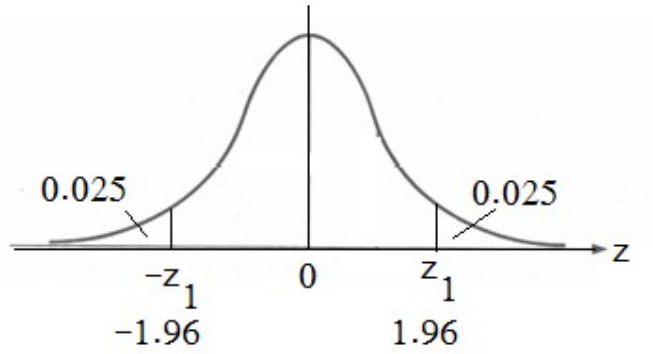
الحـــــــل :

يمكن وضع الفرض الصفرى والبديل كمافى العلاقة (83) :

الفرض الصفرى : $H_o: \mu = 20mm$

ويكون الفرض البديل : $H_1: \mu \neq 20mm$

أى أنه اختبار من الجهتين two tailed test ، وحيث أن σ للمجتمع معلومة وتساوى 2 mm تعين القيمة :



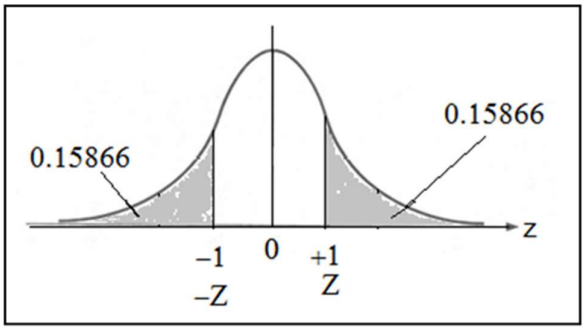
المقياس المختبر (86a): $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{19.8-20}{2/\sqrt{100}} = -1$

ويستعمل توزيع z عند درجة معنوية $\alpha = 0.05$ يلاحظ أن منطقة الرفض على الجهتين والمساحة الموجودة تحت المنحنى عندها تساوى $\alpha/2 = 0.025$

من الجداول الاحصائية : $\pm z = \pm 1.96$، وكماهو واضح فان قيمة Z المحسوبة تقع بين القيمتين ± 1.96 أى فى منطقة القبول .

القـــــــرار :

يقبل الفرض الصفرى H_o بمعنى قبول ادعاء المصنع عند درجة معنوية 0.05 .



$$p - value = 2P(z > Z) = 2(0.5 - 0.34134) = 0.31732$$

لدرجة المعنوية $\alpha = 0.01$نلاحظ أن :

$$\alpha \leq p - value \quad , \quad 0.005 \leq 0.31732$$

وبالتالى نقبل الفرض الصفرى أى قبول ادعاء المصنع لدرجة معنوية 0.01.

مثـــــــال 2:

اذا كان ادعاء أحد الباحثين أن المتوسط الحسابى $\mu = 100mm$ لمنتج ما وبعد اجراء التحليلات الاحصائية اللازمة باستخدام برنامج فى الحاسب الالى (Excel) وجد أن:

P – Value =0.5843 ، فكيف يكون القرار بدرجة معنوية 5% .

الحـــــل :

يمكن وضع الفرض الصفرى والبديل كمايلى :

الفرض الصفرى : $H_o: \mu = 100mm$

ويكون الفرض البديل : $H_1: \mu \neq 100mm$

وحيث أن $p - value(0.5843) \geq \alpha(0.05)$ فنقبل الفرض الصفرى أى قبول ادعاء أن المتوسط الحسابى $\mu = 100mm$ لدرجة معنوية 0.05 .

مثـــــــال 3 :

عينة مكونة من 9 قياسات لجزء من خط أعطت النتائج :

11.6 , 10.7 , 11.1 , 12.0 , 11.3 , 11.4 , 10.9 , 12.2 , 11.7

المطلوب اختبار فرض أن متوسط المجتمع لايقل عن 12.1 m وذلك لدرجة معنوية 0.05 .

الحـــــل :

الفرض المطلوب اختباره هو أن متوسط المجتمع لايقل عن قيمة محددة (12.1) أى أنه يمكن أن يساوى أو يزيد عن هذه القيمة ، فيمكن تطبيق الفرض الصفرى والبديل الموجودين بالعلاقة (85):

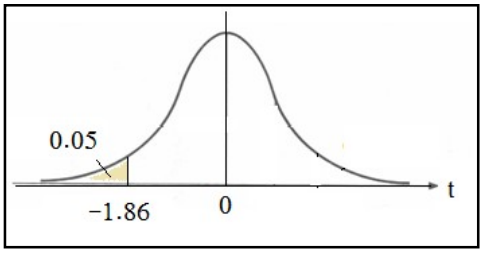
الفرض الصفرى : $H_o: \ \mu \geq 12.1m$

ويكون الفرض البديل : $H_1: \ \mu < 12.1m$

أى أنه اختبار من جهة واحدة one tailed test ، وحيث أن σ للمجتمع غير معلومة ، لذا يجب حساب s من العينة ويستعمل توزيع t حيث أن عدد مفردات العينة n=9 أقل من 30 .

$$\bar{x}(samplemean) = \frac{[x]}{n} = 11.43m$$

$$s(st.deviationofsample) = \sqrt{\frac{[(x - \bar{x})^2]}{n-1}} = \pm 0.49m$$



من العلاقة (86b) : $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{11.43-1\ .1}{\frac{0.49}{\sqrt{9}}} = -4.1$

من الجداول الاحصائية لتوزيع t وبمعلومية درجة المعنوية 0.05 يمكن ايجاد : $t_1 = -1.86$

القـــــــرار :

حيث أن t المحسوبة (4.1-) تقع فى منطقة الرفض ،

∴ نرفض الفرض الصفرى H_o ، أى أننا نرفض الادعاء بأن متوسط المجتمع اكبر أو يساوى 12.1 وبالتالى نقبل الفرض البديل H_1 .

مثـــــــال 4 :

مصنع لانتاج الفلنكات الخرسانية يدعى أن اجهاد الكسر لها اكثر من $200kg/cin^2$. أخذت عينة عشوائية مكونة من 25 فلنكة فكان متوسط الكسر لها $210kg/cin^2$ بانحراف معيارى $16kg/cin^2$، المطلوب اختبار ادعاء المصنع لدرجتى معنوية 0.05 ، 0.01 .

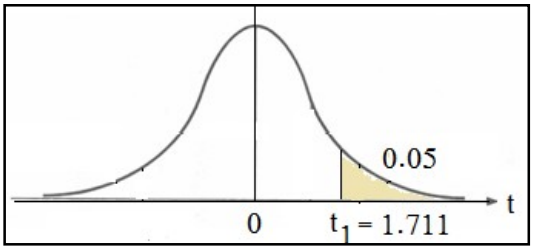
الحـــــــل :

ادعاء المصنع هنا أن متوسط الكسر اكبر من قيمة محددة ، بمعنى انها ليست أقل أوتساوى هذه القيمة المحددة ، لذا نختار الفرض الصفرى والبديل كمافى العلاقة (84) :

الفرض الصفرى : $H_o: \mu \leq 200$

ويكون الفرض البديل : $H_1: \mu > 200$

وهو اختبار من جهة واحدة one tailed test ، وأن ادعاء المصنع يماثل الفرض البديل أى انه لقبول ادعاء المصنع يجب رفض الفرض الصفرى H_o.



من العلاقة (86b) :

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{210 - 200}{\frac{16}{\sqrt{25}}} = 3.125$$

من الجداول الاحصائية : $t_1 = 1.711$

القـــــرار :

حيث أن $t > t_1$، ∴ نرفض الفرض الصفرى H_o ، ونقبل الفرض البديل H_1 ، وحيث أن ادعاء المصنع يماثل الفرض البديل ∴ نقبل ادعاء المصنع لدرجة معنوية 0.05 .

ولدرجة معنوية 0.01 نجد أن $t_1 = 2.492$ ويكون القرار قبول ادعاء المصنع لدرجة معنوية 0.01 حيث أن $t > t_1$.

مثـــــال 5 :

المطلوب حل المثال السابق اذا كان ادعاء المصنع هو ان اجهاد الكسر لايقل عن 200 وذلك لدرجة معنوية 0.05 بفرض ان n=25 ، s = 16 ، $\overline{x} = 180$

الحـــــل :

بوضع الفروض فى العلاقة (85) :

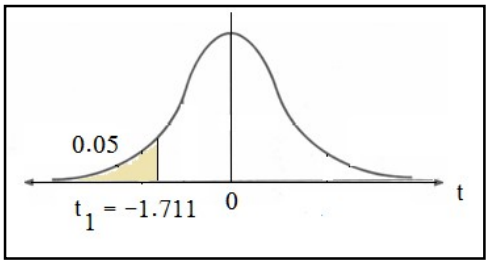
الفرض الصفرى : $H_o: \mu \geq 200$

ويكون الفرض البديل : $H_1: \mu < 200$

ونلاحظ هنا أن ادعاء المصنع يناظر الفرض الصفرى H_o .

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{180 - 200}{\frac{16}{\sqrt{25}}} = -6.25$$

من الجداول الاحصائية : $t_1 = -1.711$



القـــــرار :

حيث أن $t < t_1$ (تقع فى منطقة الرفض) ، ∴ نرفض الفرض الصفرى H_o ، ونقبل الفرض البديل H_1 ، وحيث أن ادعاء المصنع يماثل الفرض الصفرى H_o

∴ نرفض ادعاء المصنع لدرجة معنوية 0.05 .

2 – اختبار فروض على متوسطى عينتين من مجتمعين مختلفين

اذا كان لدينا عينة عشوائية حجمها n_1 ومتوسطها $\overline{x}_1$ مأخوذة من مجتمع ذو توزيع عادى $N(\mu_1, \sigma^2)$ ، وعينة عشوائية أخرى حجمها n_2 ومتوسطها $\overline{x}_2$ مأخوذة من مجتمع آخر ذو توزيع عادى $N(\mu_2, \sigma^2)$ ، والمطلوب اختبار احدى الفروض التالية على العينتين :

أ – اختبار فرض أن المتوسطات لاتختلف معنويا :

يمكن تكوين الفرضين الصفرى والبديل كمايلى :

الفرض الصفرى : $H_o: \mu_1 = \mu_2 \quad or \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$

الفرض البديل : $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

وهو اختبار من الجهتين two tailed test .

ب – اختبار فرض أن أحد المتوسطات أكبر من الآخر أو يساويه:

فيكون الفرضين الصفرى والبديل كمايلى :

الفرض الصفرى : $H_o: \mu_1 \geq \mu_2 or \mu_1 - \mu_2 \geq 0$

والفرض البديل : $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

وهو اختبار من جهة واحدة one tailed test .

جـ – اختبار فرض أن أحد المتوسطات أصغر من الآخر أو يساويه :

الفرضين الصفرى والبديل فى هذه الحالة كمايلى:

الفرض الصفرى : $H_o: \mu_1 \leq \mu_2 \quad or \quad \mu_1 - \mu_2 \leq 0$

والفرض البديل : $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

وهو اختبار من جهة واحدة أيضا one tailed test .

يلاحظ أن المجتمعين المأخوذ منهما العينتين يتبعان التوزيع العادى N ولهما نفس التباين σ^2وأن العينتين مستقلتين عن بعضهما independent .

توجد حالتين لإجراء الاختبارات السابقة :

1 – التباين σ^2 معلوم :

يعين الانحراف المعيارى العينى للمجتمعين الاول والثانى كمايلى :

$$\sigma_{\overline{x}_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \qquad .., (88a)$$

$$\sigma_{\overline{x}_2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} \qquad .., (88b)$$

كما يعين التباين الرابط (المركب) :

$$\sigma^2_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)} = \sigma^2_{\overline{x}_1} + \sigma^2_{\overline{x}_2} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \qquad .., (89)$$

ويستخدم المقياس :

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sigma_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)}} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sigma . \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad .., (90)$$

ويستخدم توزيع z من الجداول الاحصائية لتحديد القيم الحرجة لمناطق القبول والرفض .

2- التباين σ^2 مجهول :

فى هذه الحالة يحسب تباين العينتين s_1^2, s_2^2 :

$$s_1^2 = \frac{[(x - \overline{x}_1)^2]}{\nu_1}$$

حيث $x_1, x_2, \ldots . x_{n_1}$ مفردات العينة الاولى ، $\nu_1 = n_1 - 1$.

$$s_2^2 = \frac{[(x' - \overline{x}_{21})^2]}{\nu_2}$$

حيث $x'_1, x'_2, \ldots . x'_{n_1}$ مفردات العينة الثانية ، $\nu_2 = n_2 - 1$.

ويعين التباين الرابط (المركب) والمقياس كمايلى :

أ - اذا كانت n_2, n_1 كبيرة :

$$s^2_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)} = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \quad .., (91)$$

ويستخدم المقياس z :

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)}} \quad .., (92)$$

ويستخدم توزيع z من الجداول الاحصائية لتحديد القيم الحرجة لمناطق القبول والرفض .

ب - اذا كانت n_2, n_1 صغيرة :

$$s^2_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)} = s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \quad .., (93)$$

$$s^2 = \frac{\nu_1 . s_1^2 + \nu_2 . s_2^2}{\nu_1 + \nu_2} \quad .., (94)$$

حيث: $\nu_1 = n_1 - 1$ ، $\nu_2 = n_2 - 1$

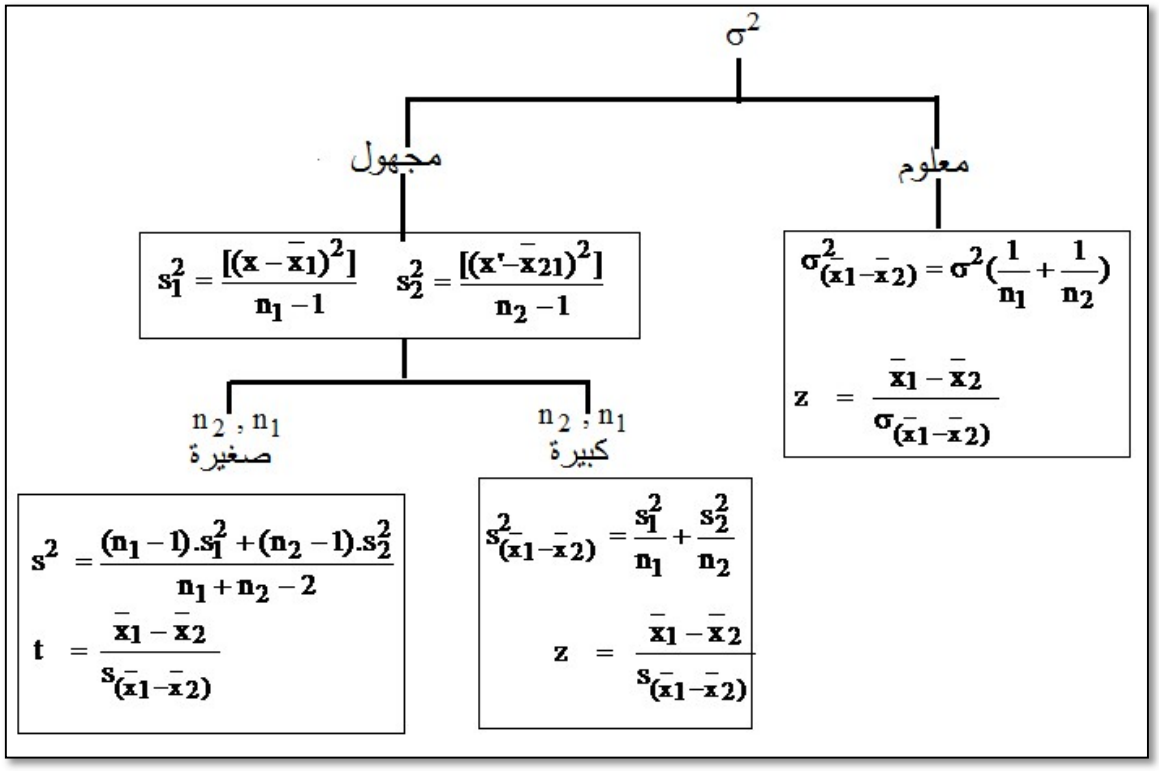
ويستخدم المقياس :

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)}} \quad ..,(95)$$

ولتحديد القيم الحرجة لمناطق القبول والرفض يستخدم توزيع$t_{\nu,1-\alpha/2}$من الجداول الاحصائية بدرجة حرية

$$\nu = \nu_1 + \nu_2$$

ويمكن تلخيص ماسبق فى شكل (18) :



شكل (18)

<u>مثـــــال 1 :</u>

أجرى اختبار لمعرفة تأثير جغرافية المنطقة على مستوى الاداء والجودة للعمال ، فأخذت عينتين عشوائيتين من منطقتين مختلفتين وكان متوسط الانتاجية والانحراف لكلا العينتين فكانت :

$$\overline{x}_1 = 110.01, s_1 = \pm 4, n_1 = 100$$
$$\overline{x}_2 = 105.21, s_2 = \pm 4.5, n_2 = 200$$

المطلوب معرفة مإذا كان لجغرافية المنطقة تأثير على مستوى الاداء وذلك لدرجة معنوية 0.02 .

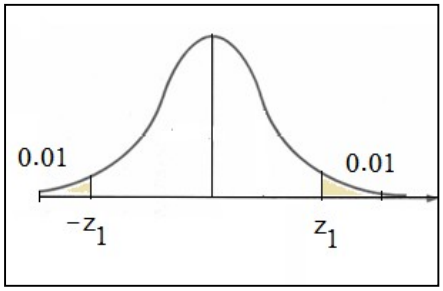
الحـــــــــل :

يمكن وضع الفرض الصفرى على أساس أنه لايوجد اختلاف فى مستوى الاداء فيكون :

الفرض الصفرى : $H_o: \mu_1 - \mu_2 = 0$

والفرض البديل : $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

وهو اختبار من الجهتين .



يلاحظ أن σ^2 غير معلومة وحجم العينتين أكبر من 30 فيستخدم توزيع z . من العلاقة (91):

$$s^2_{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)} = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} = 0.2613$$

ومن العلاقة (92) :

$$z = \frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{s_{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)}} = \frac{110.01-105.21}{\sqrt{0.2613}} = 9.39 \quad ,$$

القيم الحرجة من الجداول :$\pm z_1 = \pm 2.33$

القـــــرار :

حيث أن z=9.39 تقع فى منطقة رفض الفرض الصفرى ،

∴ نرفض الفرض الصفرى وهذا يعنى قبول الفرض البديل ،

أى أن هناك اختلاف بين مستوى الاداء نتيجة لجغرافية المنطقة والتى لها تأثير على مستوى الاداء .

مثـــــال 2 :

قيست مسافة معينة بواسطة مجموعتين من الراصدين فكانت النتائج :

$$I: \overline{x}_1 = 103.62m, s_1^2 = 0.0862cm, n_1 = 10$$
$$II: \overline{x}_2 = 103.25m, s_2^2 = 0.0672cm, n_2 = 10$$

المطلوب اختبار ماذا كان هناك اختلاف معنوى بين المجموعتين وذلك لدرجة معنوية 0.01 .

الحـــــــل :

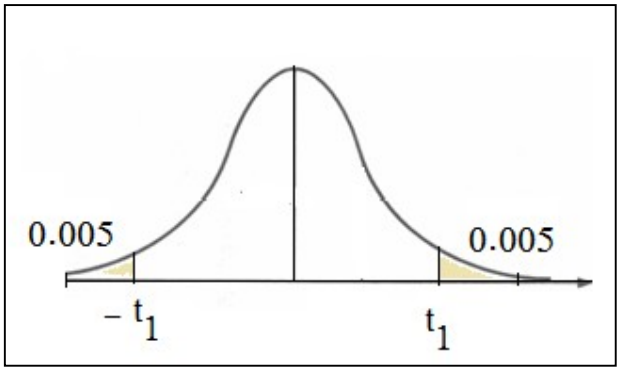
الفرض الصفرى : $H_o: \mu_1 - \mu_2 = 0$

والفرض البديل : $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

وهو اختبار من الجهتين .

$\alpha = 0.01 \alpha/2 = 0.005$

يلاحظ أن σ^2 غير معلومة وحجم العينتين أقل من 30 فيستخدم توزيع t .



درجات الحرية :

$\nu_1 = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$ ، $\nu_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$

$$s^2 = \frac{\nu_1 . s_1^2 + \nu_2 . s_2^2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{9x0.0862 + 9x0.0672}{18} = 0.0767$$

من العلاقة (95):

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)}} = \frac{103.62 - 103.25}{\sqrt{0.0767}} = 1.3359$$

القيم الحرجة من الجداول :

$$t_1 = t_{\nu, 1-\alpha/2} = 2.878, t_2 = -t_1$$

القـــــرار : حيث أن t=1.3359 تقع فى منطقة قبول الفرض الصفرى ،

∴نقبل الفرض الصفرى وهذا يعنى أن هناك اختلاف معنوى بين المجموعتين بدرجة معنوية 1%.

3 – اختبار فروض على نسبة ما Proportions :

لإجراء اختبار الفروض على نسبة ما $\overline{p}$ يستعمل المقياس :

$$z = \frac{\overline{p} - p}{\sigma_{\overline{p}}} \quad ..,(96)$$

وفيها الانحراف المعيارى للنسبة : $\sigma_{\overline{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ ، $q = 1 - p$

وقد تكون مناطق الرفض من جهة واحدة أو من الجهتين .

مثـــــال:

عند اجراء اختبار على نسبة عربات النقل التى تمر من طريق ما وجد أنه من بين 400 سيارة كانت هناك 210 عربة نقل . المطلوب اختبار فرض أن النسبة هى 50% وذلك لدرجة معنوية 0.01 .

الحـــــل :

الفرض الصفرى : $H_o: p = 0.5$

والفرض البديل : $H_1: p \neq 0.5$

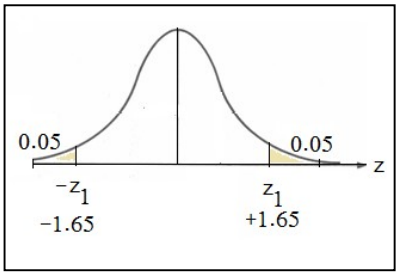
وهو اختبار من الجهتين .

$$p = 0.5, q = 1 - p = 0.5, \overline{p} = \frac{210}{400} = 0.525$$

$$\sigma_{\overline{p}} = \sqrt{\frac{\overline{pq}}{n}} = \sqrt{\frac{0.5x0.5}{400}} = 0.025$$

من العلاقة (96) : $z = \frac{\overline{p}-p}{\sigma_{\overline{p}}} = \frac{0.525-0.5}{0.025} = 1$

القيم الحرجة من الجداول مبينة فى الشكل التالى :



القـــــــرار :

حيث أن z=1 تقع فى منطقة قبول الفرض الصفرى ،

∴ نقبل الفرض الصفرى وهذا يعنى أن نسبة عربات النقل 50% من العربات التى تمر بالطريق وذلك بدرجة معنوية 1% .

4 – اختبار الفروض على فرق نسبتين : Differences of proportions

اذا كان المطلوب اختبار أو مقارنة نسبتين p_2, p_1 حيث تمثلان مجتمعين مختلفين ، نضع الفرض الصفرى كمايلى :

الفرض الصفرى : $H_o: p_1 - p_2 = 0 (p_1 = p_2)$

ويأخذ الفرض البديل احدى الصور التالية :

$a) H_1: p_1 - p_2 \neq 0$ $\quad two\ \ tailed\ \ test$

$b) H_1: p_1 - p_2 > 0$ $\quad one\ \ tailed\ \ test$

$c) H_1: p_1 - p_2 < 0$ $\quad one\ \ tailed\ \ test$

فاذا كانت النسب المستنتجة لعينتين من المجتمعين حجم الاولى n_1 والثانية n_2 هى :

$$\overline{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}, \overline{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

يمكن حساب المقياس :

$$z = \frac{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}{s_{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}} \quad .., (97)$$

حيث $s_{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}$ يمثل الانحراف المعيارى لفرق النسبتين :

$$s_{\overline{p}_1 - \overline{p}_2} = \sqrt{\bar{p}\,\bar{q}\ \ (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})} \quad .., (98)$$

$$\overline{p} = \frac{n_1 \overline{p}_1 + n_2 \overline{p}_2}{n_1 + n_2} \quad .., (99)$$

$$\overline{q} = 1 - \overline{p} \quad .., (100)$$

ويحدد المقياس z مناطق القبول والرفض .

أستاذ المساحة والجيوديسيا
كلية الهندسة / جامعة الأزهر
essamfawaz2001@gmail.com

مثـــــال:

اجرى استفتاء فى منطقتين واقعتين على طريق رئيسى بشأن تحويل مسار الطريق بعد مروره على المنطقتين فكان: عدد الموافقين فى المنطقة الاولى $x_1 = 75, n_1 = 75$ ، وفى المنطقة الثانية : $x_2 = 103, n_2 = 200$ المطلوب اختبار فرض أنه لايوجد اختلاف فى نسبة الموافقين فى كلا المنطقتين وذلك لدرجة معنوية 0.01 .

الحـــــــل :

$H_o: p_1 - p_2 = 0 (p_1 = p_2)$
$H_1: p_1 - p_2 \neq 02 - tailedtest$

$$\overline{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{75}{150} = 0.50, \overline{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{103}{200} = 0.515$$
$$\overline{q}_1 = 1 - \overline{p}_1 = 0.50, \overline{q}_2 = 1 - \overline{p}_2 = 0.485$$

بالتطبيق فى العلاقة (99):

$$\overline{p} = \frac{n_1 \overline{p}_1 + n_2 \overline{p}_2}{n_1 + n_2} = 0.51$$

ومن العلاقة (100) : $\overline{q} = 1 - \overline{p} = 0.49$

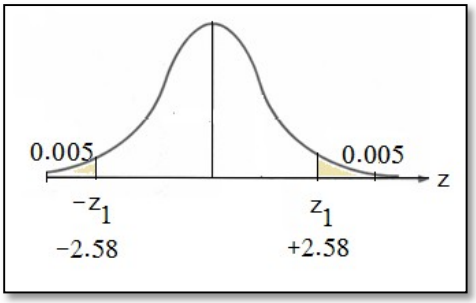
الانحراف المعيارى لفرق النسبتين من العلاقة (98):

$$s_{\overline{p}_1 - \overline{p}_2} = \sqrt{\overline{pq}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})} = 0.054$$

والمقياس المستعمل (97):

$$z = \frac{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}{s_{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}} = \frac{0.50 - 0.515}{0.054} = -0.278$$

من الجداول الاحصائية نوجد حدود الرفض والقبول :



القـــــــرار :

حيث أن z=-0.278 تقع فى منطقة قبول الفرض الصفرى ، وهذا يعنى أنه لايوجد اختلاف بين النسبتين وذلك بدرجة معنوية 1% .

5 – اختبار الفروض على الفروقات بين الارصاد : Paired Observations

يستخدم هذا الاختبار لمقارنة طريقتين مختلفتين حيث تجرى التجارب بكلا الطريقتين ويكون الفرق بينهما هو مجال البحث .مثال ذلك لمقارنة طريقتين I , II لايجاد نسبة الحديد فى مركب ما ، حللت عدد n مركب بالطريقتين وكانت النتائج كماهو مبين فى بالجدول التالى:

	I	II	d=I−II	$d-\bar{d}$	$(d-\bar{d})^2$
1	x_1	x'_1	$d_1 = x_1 - x'_1$	$d_1-\bar{d}$	$(d_1-\bar{d})^2$
2	x_2	x'_2	$d_2 = x_2 - x'_2$	$d_2-\bar{d}$	$(d_2-\bar{d})^2$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	x_n	x'_n	$d_n = x_n - x'_n$	$d_n-\bar{d}$	$(d_n-\bar{d})^2$
[ ]			[d]		$[(d-\bar{d})^2]$

متوسط الفروقات : $\bar{d} = \frac{[d]}{n}$

الانحراف المعيارى : $s_d = \sqrt{\frac{[(d-\bar{d})^2]}{n-1}}$

ويكون الفرض الصفرى كمايلى :

$$H_o: \mu_d = \mu_i - \mu'_i = 0 \quad (\mu_i = \mu'_i) \quad for \quad i = 1,2,\dots n$$

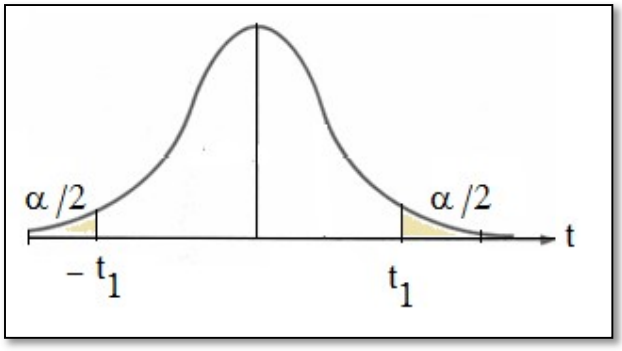
أى أنه لايوجد فرق بين الطريقتين .

والفرض البديل :

$$H_1: \mu_d = \mu_i - \mu'_i \neq 0 \quad (\mu_i \neq \mu'_i) \quad for \quad i = 1,2,\dots n$$
$$2 - tailedtest$$

يحسب المقياس :

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_d/\sqrt{n}} .., (101)$$



بمعرفة درجة المعنويةα ودرجة حرية $\nu = n - 1$ يمكن تحديد القيم الحرجة للرفض والقبول ويتخذ القرار على ضوء موقع t بالنسبة لمناطق القبول والرفض ، فى حالة وقوع t فى منطقة القبول فهذا معناه قبول الفرض الصفرى أى أنه لايوجد اختلاف بين الطريقتين والعكس صحيح .

مثـــــال :

لاختبار طريقتينII , I لايجاد ارتفاعات النقط عن مستوى معين وللمقارنة بينهما عينت ارتفاعات عشرون نقطة بالطريقتين فكانت النتائج :

point	I	II
1	12.5	14.9
2	13.1	15.9
3	12.1	14.4
4	13.5	16.9
5	13.1	17
6	11.8	14.2
7	16	20
8	13	15.5
9	136	141
10	14.7	14.4
11	16.9	17
12	13.3	12.9
13	14.6	14.6
14	11.6	11.4
15	17.2	17.7
16	11.8	11.1
17	120	111
18	12	12.5
19	12.5	12.3
20	14.1	12.5

المطلوب اختبار الادعاء بأن الفرق بين الارتفاعات غير معنوى وذلك بدرجة معنوية 0.05 .

الحـــــــل :

يمكن اجراء الحسابات الازمة كماهو موضح بالجدول التالى :

	I	II	d=I−II	$d - \overline{d}$	$(d - \overline{d})^2$
1	12.5	14.9	-2.4	-1.53	2.3409
2	13.1	15.9	-2.8	-1.93	3.7249
3	12.1	14.4	-2.3	-1.43	2.0449
4	13.5	16.9	-3.4	-2.53	6.4009
5	13.1	17	-3.9	-3.03	9.1809
6	11.8	14.2	-2.4	-1.53	2.3409
7	16	20	-4	-3.13	9.7969
8	13	15.5	-2.5	-1.63	2.6569
9	136	141	-5	-4.13	17.0569
10	14.7	14.4	0.3	1.17	1.3689
11	16.9	17	-0.1	0.77	0.5929
12	13.3	12.9	0.4	1.27	1.6129
13	14.6	14.6	0	0.87	0.7569
14	11.6	11.4	0.2	1.07	1.1449
15	17.2	17.7	-0.5	0.37	0.1369
16	11.8	11.1	0.7	1.57	2.4649
17	120	111	9	9.87	97.4169
18	12	12.5	-0.5	0.37	0.1369
19	12.5	12.3	0.2	1.07	1.1449
20	14.1	12.5	1.6	2.47	6.1009
[ ]			-17.4		168.422

متوسط الفروقات :

$$\overline{d} = \frac{[d]}{n} = \frac{\text{-}17.4}{20} = \text{-}0.87$$

الانحراف المعيارى :

$$s_d = \sqrt{\frac{[(d - \overline{d})^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{168.422}{20\text{-}1}} = \pm 2.9773$$

<u>ويكون الفرض الصفرى:</u>

$$H_o: \mu_d = \mu_i - \mu'_i = 0 (\mu_i = \mu'_i) fori = 1,2,\ldots n$$

أى أنه لايوجد فرق بين الطريقتين .

<u>والفرض البديل :</u>

$$H_1: \mu_d = \mu_i - \mu'_i \neq 0 (\mu_i \neq \mu'_i) fori = 1,2,\ldots n$$
$$2 - tailedtest$$

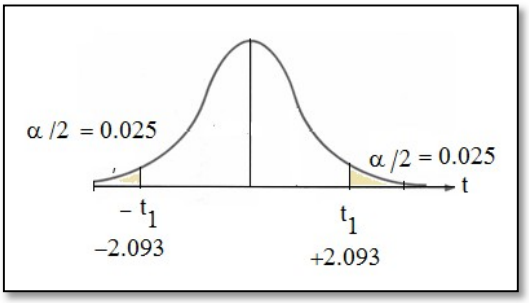
يحسب المقياسا من العلاقة (101) :

$$t = \frac{\overline{d} - \mu_d}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{-0.87 - 0}{\frac{2.9773}{\sqrt{20}}} = \text{-}1.30681$$

$$\nu = n - 1 = 20 - 1 = 19$$

ومن الجداول الاحصائية للمقياس t :

$$t_{\nu,1-\alpha/2} = t_{19,0.975} = 2.093$$



القـــــرار :

حيث أن t = −1.30681 تقع فى منطقة قبول الفرض الصفرى ،

وهذا يعنى أن الفروقات d غير معنوية وذلك لدرجة معنوية 5% .

6 – تحليل التباين : ANalysis Of Variance ANOVA

الاشتراطات الواجب توافرها لإجراء اختبار ANOVA

1 – أن يكون المتغير التابع يتبع التوزيع العادي (الطبيعي)Normal distribution .
للتحقق من هذا الشرط يجرى اختبار يسمىTest of Normality ،
يستخدم اختبار كولموجروف – سمير نوف Kolmogorov–Smirnov للعينات التي حجمها أقل من 50 ،
أو اختبار شابيرو – ولك Shapiro–Wilk للعينات الأكبر 50 .

2 – تساوى تباين العينات المختلفة (متجانسة) Sample homogeneity. للتحقق من هذا الشرط يجرى اختبار التجانس للتباينات بين (المجموعات) العينات Test of Homogeneityحيث يستخدم اختبار ليفينى Levene .

3 – يجب عدم تواجد قيم متطرفة في المتغير التابع.
.(Non–existence outliers in the dependent variable)

4 – أن يكون المتغير التابع كمي (عددي) (Quantitative numerical).

5 – أن تكون العينات مختارة بشكل عشوائي Randomly selected.

فى حالة عدم توافر احدى الاشتراطات السابقة نلجأ الى طرق احصائية أخرى يطلق عليها الطرق الإحصائية الغير معلمية Nonparametric statistic Methods، حيث تستخدم كبديل لاختبارات الفروض في الحالات التالية :

1 - المجتمعات المأخوذ منها العينات لا تتبع التوزيع الطبيعي Normal distribution
2 - تباينات هذه المجتمعات غير معلومة .
3 - تباينات هذه المجتمعات غير متساوية.
4 - العينات المسحوبة من هذه المجتمعات مستقلة .

جدول (10) يبين الفرق بين الطرق الإحصائية المعلمية Parametric والغير معلمية Nonparametric

جدول (10) الطرق الاحصائية statistic Methods

الطرق المعلمية Parametric	الطرق غير المعلمية Non parametric
1 - يجب أن يكون توزيع المجتمع طبيعياً.	لا تتطلب ايه افتراضات أو معلومات حول خصائص التوزيع الأساسي للمجتمع .
2 - تستخدم اذا كان حجم العينة كبير.	تستخدم لمعالجة وتحليل البيانات اذا كان حجم العينة صغير جدا.
3 - تعتمد على الدرجات الأصلية والتي يتم تحليلها كما هي.	تعتمد على البيانات على شكل تكرارات أو رتب مما يؤدي إلى ضياع بعض المعلومات المفيدة.
4 - تعتبر أصعب في الاستخدام وتحتاج الى وقت أطول لتحليل البيانات.	أفضل وسيلة للتقدير المبدئي السريع، وهي أسهل في الاستخدام والوقت الذي تحتاجه اقل للحصول على النتائج .
5 - يجب اختيار العينة من المجتمع بصورة عشوائية، وأن تكون المقاييس الاحصائية للعينة (مقاييس النزعة المركزية والتشتت) مطابقة للمجتمع	ليس بالضرورة اختيار العينة من المجتمع بصورة عشوائية
6 - تستخدم لمعالجة وتحليل البيانات الكمية	تستخدم لمعالجة وتحليل البيانات النوعية
7 - من امثلتها اختبار (z) واختبار (t) واختبار (F)...	من امثلتها اختبار χ^2 واختبار مان وتني واختبار كروسكال واليز ...
8 - أقوى من الطرق الإحصائية اللامعلمية	أقل قوة من الطرق الإحصائية المعلمية

الحالات المختلفة لبعض الطرق الاحصائية اللامعلمية

أ - حالة عينة واحدة (من مجتمع واحد):

1 - اختبار χ^2 لجودة التوفيق ($5 \geq$ (المتوقع التكرار)$\hat{k}$, $n \geq 30$)

2 - اختبار χ^2 لاستقلال خاصيتين لعينة ،

3 - اختبار كلمجروف، سميرنوف Kolmogrov-Simirnov لعينة واحدة ($\boldsymbol{n < 30}$, $\boldsymbol{\hat{k} < 5}$)

ب - حالة عينتين من مجتمعين:

1 – اختبار كلمجروف – سميرنوف Kolmogrov-Simirnov لعينتين
($n_1 < 40$, $n_2 < 40$) الارصاد على صورة تكرارات)

2- اختبار مان ويتني mann – whitney ($n \leq 20$) ، الارصاد لاتتبع التوزيع الطبيغى والتباينات غير متساوية .

جـ - حالة وجود أكثر من عينتين (من أكثر من مجتمعين):

اختبار كروسكال واليس ويستخدم فى حالة :

1 - البيانات لا تتبع التوزيع الطبيعي.
2 - عدم تساوي التباينات.
3 – لا توجد معلومات عن شكل المجتمعات المسحوب منها العينات.

أ - حالة عينة واحدة (من مجتمع واحد)

1 - اختبار χ^2 لجودة التوفيق

أولاً : شروط تطبيق الاختبار (k : التكرار الفعلي ، $\hat{k}$: التكرار المتوقع)

1 - حجم العينة (n) أو مجموع التكرارات اكبر من أو تساوى 30 : $n \geq 30$

2 - التكرار المتوقع = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{\text{عدد التكرارات}}$ أكبر من أو يساوى 5 : $\hat{k} \geq 5$

ثانياً : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي H_0 : $k=\hat{k}$ العينة ممثلة للمجتمع ، أي لا يوجد اختلاف جوهري بين المرصود والمتوقع)

(2) الفرض البديل H_A : $k \neq \hat{k}$ العينة غيرممثلة للمجتمع ، أي يوجد اختلاف جوهري بين المرصود والمتوقع)

(3) تحديد درجة المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختبار χ^2 لجودة التوفيق.

(5) العمليات الحسابية :كما هو موضح بالجدول التالى:

k القيم المرصودة	$\hat{k}$ القيم المتوقعة	$(k-\hat{k})$	$(k-\hat{k})^2$	$(\frac{(k-\hat{k})^2}{\hat{k}})$
$\sum$				χ^2_{calc}

$$\chi^2_{calc} = \sum \left(\frac{(k-\hat{k})^2}{\hat{k}} \right) \quad \ldots \quad (102)$$

χ^2_{tab} (من الجداول الإحصائية) عند درجة حرية ν : $\nu = n - 1 - n'$ ،
حيث n' : عدد العوامل (الثوابت) المقدرة واللازمة لحساب التوزيع النظرى.

القـــــــــرار:

اذا كانت $\chi^2_{tab} > \chi^2_{tab}$ لايوجد اختلاف جوهري (قبول الفرض الأصلي)،

اذا كانت $\chi^2_{tab} < \chi^2_{tab}$ يوجد اختلاف جوهري (رفض الفرض الأصلي).

مثـــــال 1 :

عند رمى زهرة طاولة 120 مرة كان عدد ظهور كل رقم كالتالى :

i	1	2	3	4	5	6
k	17	24	21	18	26	14

حيث : k تمثل عدد مرات ظهور الرقم i (التكرار الفعلى) ،

المطلوب اختبار فرض أن احتمال ظهور أى رقم $\hat{k} = \frac{1}{6}(i = 1,2,\ldots.6)$ ، وذلك لدرجة معنوية 0.05 .

الحـــــل :

(1) الفرض الصفرى H_0 : k= $\hat{k}$ العينة ممثلة للمجتمع ، أي لا يوجد اختلاف جوهري بين المرصود والمتوقع

(2) الفرض البديل H_A : $k \neq \hat{k}$ العينة غيرممثلة للمجتمع ، أي يوجد اختلاف جوهري بين المرصود والمتوقع

(3) تحديد درجة المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختبار χ^2 لجودة التوفيق.

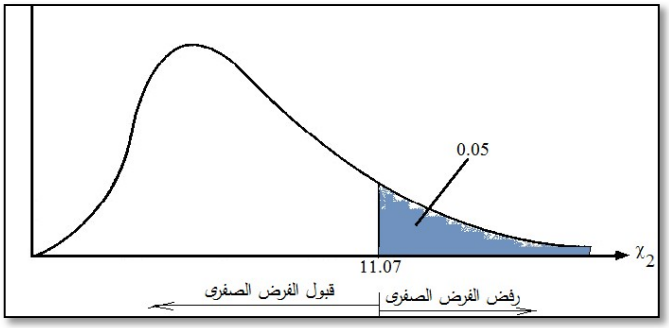
(5) العمليات الحسابية :كما هو موضح بالجدول التالى:

i	$\hat{k}$	k	$k - \hat{k}$	$(k - \hat{k})^2$	$(k - \hat{k})^2/\hat{k}$
1	20	17	3−	9	0.45
2	20	18	2−	4	0.2
3	20	24	4	16	0.8
4	20	26	6	36	1.8
5	20	21	1	1	0.05
6	20	14	6−	36	1.8
				Sum	$\chi^2_{calc} = 5.1$

من الجداول الاحصائية : $\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0.05,5} = 11.07$

$$\because \chi^2(5.1) < \chi^2_{\alpha,\nu}(11.07)$$

أى انها تقع فى منطقة القبول ، بمعنى قبول الفرض الصفرى H_0 (الاحتمال النظرى لظهور أى رقم $\left(\frac{1}{6}\right)$ مطابق مع الارصاد الفعلية .



مثـــــال 2:

اذا كان عدد الحوادث المسجلة خلال 100 يوم كمايلى :

x(حادثة)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_o (يوم)	4	14	23	22	16	10	6	3	2

المطلوب اختبار فرض أن هذه الارصاد تتبع توزيع بواسون بدرجة معنوية 0.05 .

الحـــــل :

(1) الفرض الصفرى H_0 : $k=\hat{k}$ العينة ممثلة للمجتمع ، أي لا يوجد اختلاف جوهري بين المرصود وتوزيع بواسون

(2) الفرض البديل H_A : $k \neq \hat{k}$ العينة غيرممثلة للمجتمع ، أي يوجد اختلاف جوهري بين المرصود وتوزيع بواسون

(3) تحديد درجة المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختبار χ^2 لجودة التوفيق.

(5) العمليات الحسابية :كما هو موضح بالجدول التالى:

توزيع بواسون الاحتمالى :

$$p(x) = \frac{\mu^x . e^{-\mu}}{x!}$$

ويكون التكرار النظرى : $\hat{k} = 100p(x)$

يلاحظ أنه لاستعمال توزيع بواسون يلزم ايجاد المتوسط μ فتكون n'=1 وبذلك تكون درجة الحرية

$$\nu = n - 1 - n' = 9 - 1 - 1 = 7$$

وتكون القيمة الحرجة من الجداول الاحصائية :

$$\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0.05,7} = \chi^2_{tab} = 14.07$$

الوسط الحسابى μ يمكن ايجاده من جدول الحسابات التالى :

$$\mu = \frac{\sum x.f_o}{\sum f_o} = \frac{313}{100} = 3.13$$

x	k	X .k	p(x)	$\hat{k}$	$k-\hat{k}$	$(k-\hat{k})^2/\hat{k}$
0	4	0	0.0437	4.3718	−0.3718	0.0316
1	14	14	0.1368	13.6837	0.3163	0.0073
2	23	46	0.2141	21.4149	1.5851	0.1173
3	22	66	0.2234	22.3429	−0.3429	0.0053
4	16	64	0.1748	17.4833	−1.4833	0.1259
5	10	50	0.1094	10.9446	−0.9446	0.0815
6	6	36	0.0571	5.7094	0.2906	0.0148
7	3	21	0.0255	2.5529	0.4471	0.0783
8	2	16	0.0100	0.9988	1.0012	1.0035
Sum	100	313				1.4655= χ^2_{calc}

$\because \chi^2_{calc}(1.47) < \chi^2_{tab}(14.07)$

أى انها تقع فى منطقة القبول ، أى قبول الفرض الأصلي H_0 أى أن الارصاد موافقة لتوزيع بواسون الاحتمالى .

مثـــــال 3:

عند فحص عدد 300 وحدة من انتاج مصنع وجد أن 130 وحدة صالحة بينما 170 غيرصالحة (معيبة)، المطلوب اختبار فرض أن النسبة بين الصالح والمعيب 1:1 وذلك لدرجة معنوية 0.05 .

الحـــــــل :

(1) الفرض الصفرى H_0 : $k=\hat{k}$ العينة ممثلة للمجتمع ، أي لا يوجد اختلاف جوهري بين المرصود والمتوقع.

(2) الفرض البديل H_A : $k \neq \hat{k}$ العينة غيرممثلة للمجتمع ، أي يوجد اختلاف جوهري بين المرصود والمتوقع.

(3) تحديد درجة المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختبار χ^2 لجودة التوفيق.

(5) العمليات الحسابية :كما هو موضح بالجدول التالى:

	k	$\hat{k}$	$k-\hat{k}$	$(k-\hat{k})^2/\hat{k}$
صالح	130	300x0.5=150	−20	2.66
غير صالح	170	300x0.5=150	20	2.66
sum				$5.32=\chi^2_{calc}$

$\nu = n-1-n' = 2-1-0 = 1$

وتكون القيمة الحرجة من الجداول الاحصائية : $\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0.05,1} = 3.84$

وحيث أن: $[\chi^2_{calc} = 5.32] > [\chi^2_{0.05,1} = 3.84]$ أى فى منطقة الرفض ، فتكون القيم المرصودة تخالف النسبة 1:1 وذلك لدرجة معنوية .

مثـــال 4:

الجدول التالي يمثل عدد المواليد في أحد المستشفيات في كل موسم من مواسم السنة الأربعة في سنة ما :

المطلوب: هل تدل هذه البيانات على وجود اختلافات جوهرية بين عدد المواليد في كل موسم عند مستوى معنوية 5% ، إذا علمت أن : $\chi^2_3 = 7.81$

الموسم	الشتاء	الربيع	الصيف	الخريف	المجموع
عدد المواليد	50	100	53	97	300

الحـــل :

أولاً : شروط التطبيق :

1 - حجم العينة (n) أو مجموع التكرارات اكبر من أو تساوى 30 : 300>30

2 - التكرار المتوقع = مجموع التكرارات /عدد التكرارات أكبر من أو يساوى 5

$$\hat{k} = \frac{300}{4} = 75 > 5$$

لذا يستخدم الاختبار χ^2لجودة التوفيق

ثانياً : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الصفرى H_0 : $k=\hat{k}$ (عدد المواليد موزع بالتساوي على فصول السنة).

(2) الفرض البديل H_A : $k \neq \hat{k}$ (عدد المواليد غير موزع بالتساوي على فصول السنة).

(3) درجة المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختبار χ^2 لجودة التوفيق.

(5) العمليات الحسابية :

k	$\hat{k}$	$(k-\hat{k})$	$(k-\hat{k})^2$	$(\frac{(k-\hat{k})^2}{\hat{k}})$
50	75	25-	625	8.33
100	75	25	625	8.33
53	75	22-	484	6.45
97	75	22	484	6.45
$\sum$ 300	300			**29.57**

- $\chi^2 = \sum\left(\frac{(k-\hat{k})^2}{\hat{k}}\right) = 29.57$: χ^2_{cal}

χ^2_{tab} عند درجة حرية = عدد الفئات −1 =4 −1 =3

χ^2_{tab} =7.81

$\chi^2_{cal} > \chi^2_{tab}$ ،

لذا يرفض الفرض الأصلي ويقبل الفرض البديل .

مثـــال 5:

سحبت عينة عشوائية من 100 من متفرجي مباريات الكرة لمعرفة النادي الذى ينتمون اليه فتم الحصول على النتائج التالية :

النادى	A	B	C	D	E	F	المجموع
عدد المشجعين	10	17	15	14	23	21	100

هل هذه العينة ممثلة لتفضيلات المشجعين والمجتمع بالنسبة للاندية المختلفة أم لا ؟ أو بمعنى آخر هل هذه العينة ممثلة للمجتمع أم لا ، وذلك بمستوى معنوية 5% إذا علمت أن : $\chi^2_5 = 11.07$

الحـــل:

أولاً : شروط تطبيق الاختبار

1- حجم العينة *(n)* أو مجموع التكرارات اكبر من أو تساوى 30

2 – التكرار المتوقع = مجموع التكرارات /عدد التكرارات

= 100/6 =16.67 *أكبر من أو يساوى 5*

∴الاختيار المناسب هو اختيار χ^2 لجودة التوفيق

ثانياً : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الصفرى H_0 : $k=\hat{k}$ أو العينة تمثل المجتمع

(2) الفرض البديل H_A : $k \neq \hat{k}$ أو العينة لا تمثل المجتمع

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) مقياس الإحصائي المناسب : اختبار χ^2 لجودة التوفيق)

(5) العمليات الحسابية :

	k	$\hat{k}$	$(k-\hat{k})$	$(k-\hat{k})^2$	$\frac{(k-\hat{k})^2}{\hat{k}}$
	10	16.67	-6.67	44.444	2.667
	17	16.67	0.33	0.111	0.007
	15	16.67	-1.67	2.777	0.167
	14	16.67	-2.67	7.111	0.427
	23	16.67	6.33	40.111	2.407
	21	16.67	4.33	18.777	1.127
sum	100	100			6.800

χ^2 المحسوبة $\chi^2_{calc} = \sum\left(\frac{(k-\hat{k})^2}{\hat{k}}\right) = 6.8$

χ^2 الجدولية عند درجة حرية = عدد الفئات −1 =6 −1 =5

$\chi^2_5 = 11.07$

χ^2 المحسوبة < χ^2الجدولية ، يقبل الفرض الأصلي ويرفض الفرض البديل .

مثـــــــال 6:

ألقيت قطعة نقود 200 مرة فظهر الوجه 90 مرة والظهر 110 مرة فهل تعتقد أن قطعة النقود متكاملة التوازن (غير متحيزة) ، علماً بأن : $\chi^2_1 = 3.84$

الحـــــل :

أولاً : شروط التطبيق :

1 - مجموع التكرارات = 200>30

التكرار المتوقع $\hat{k} = \frac{200}{2}$ > 5

∴الاختيار المناسب هو اختيار χ^2 لجودة التوفيق

ثانياً : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الصفرى H_0 : k=$\hat{k}$ أو قطعة النقود متوازنة

(2) الفرض البديل H_A : $k \neq \hat{k}$ أو قطعة النقود غير متوازنة

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختبار χ^2 لجودة التوفيق

	k	$\hat{k}$	$(k-\hat{k})$	$(k-\hat{k})^2$	$(\frac{(k-\hat{k})^2}{\hat{k}})$
	90	100	-10	100	1.0
	110	100	10	100	1.0
sum	200	200	0		2.0

χ^2 المحسوبة $\chi^2 = \sum\left(\frac{(k-\hat{k})^2}{\hat{k}}\right) = 2$

χ^2 الجدولية عند درجة حرية = عدد الفئات -1 =6 -1 =5

$\chi_1^2 = 3.84$

χ^2 المحسوبة < χ^2الجدولية ،

يقبل الفرض الأصلي ويرفض الفرض البديل .

اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة

يستخدم كبديل لأختبار χ^2 لجودة التوفيق.

أولاً : شروط التطبيق :

1 - حجم العينة (n) أو مجموع التكرارات أقل من 30 (n<30) أو

2 - التكرار المتوقع = مجموع التكرارات /عدد التكرارات أقل من $\hat{k} < 5$

في حالة تحقق هذين الشرطين أو احدهما يستخدم هذا الاختبار .

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي H_0: لا يوجد اختلاف جوهري بين التكرار المشاهد والتكرار المتوقع

(2) الفرض البديل H_A: يوجد اختلاف جوهري بين التكرار المشاهد والتكرار المتوقع

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) مقياس الإحصائي المناسب : **اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة**

(5) العمليات الحسابية :

$$D_{calc} = \frac{\max|\hat{k}_m - k_m|}{\sum k} \quad \dots (103)$$

D_{calc} : قيمة D المحسوبة .

| | |: القيمة المطلقة .

$\hat{k}_m$: تكرار متجمع صاعد للتكرارات المتوقعة .

k_m : تكرار متجمع صاعد للتكرارات المشاهدة .

تقارن قيمة D_{calc} بقيمة D الجدولية عند درجة حرية = حجم العينة n .

القـــرار:

اذا كانت D_{calc} < D : يقبل الفرض الأصلي ويرفض الفرض البديل. والعكس صحيح.

مثـــــــال 1:

تم سحب عينة عشوائية من 22 طالب وطالبة لمعرفة اعداد المنتمين إلى كل نادى من الاندية المصرية وكانت النتيجة كالتالي :

النادي	A	B	C	D	E	F	المجموع
العدد	3	4	2	5	2	6	22

المطلوب اختبار فرض أن عدد الطلاب المنتمين للأندية موزعة بالتساوي بمعنى هل العينة ممثلة للمجتمع أو تعكس انتماء الطلاب بالنسبة للأندية في المجتمع عند مستوى معنوية 5% إذا علمت أن :

D(22)=0.281 , D(21)=0.287

الحـــــل :

أولاً : شروط التطبيق :

1 - حجم العينة (n) أو مجموع التكرارات أقل من 30 (22 <30) أو

2 - التكرار المتوقع = مجموع التكرارات /عدد التكرارات $= \frac{22}{6} = 3.67$

$\hat{k} < 5$

بتحقق الشرطين يستخدم اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي H_0: لا يوجد اختلاف جوهري بين التكرار المرصود والتكرار المتوقع

(2) الفرض البديل H_A: يوجد اختلاف جوهري بين التكرار المرصود والتكرار المتوقع

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) مقياس الإحصائي المناسب : اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة

(5) العمليات الحسابية :

k	$\hat{k}$	k_m	$\hat{k}_m$	$\lvert\hat{k}_m - k_m\rvert$
3	3.667	3	3.667	-0.67
4	3.667	7	7.333	-0.33
2	3.667	9	11	-2
5	3.667	14	14.67	-0.67
2	3.667	16	18.33	-2.33 Max
6	3.667	22	22	0.00
22	22	sum		

$$D_{calc} = \frac{\max\lvert\hat{k}_m - k_m\rvert}{\Sigma k} = \frac{2.33}{22} = 0.106$$

D(22)=0.2809 (from table ,
degree of freedom =n = 22)

$\because D_{calc} <$ D

القـــرار: يقبل الفرض الأصلي ويرفض الفرض البديل.

مثـــــــال 2:

سحبت عينة عشوائية من 24 عميل لمعرفة تفضيلاتهم بالنسبة للبنوك الموجودة فتم الحصول على النتائج التالية :

البنك	A	B	C	D	E	F	المجموع
عدد العملاء	2	3	4	5	3	7	24

المطلوب:

معرفة ما اذا كانت العينة تعكس تفضيلات العملاء بالنسبة للبنوك المختلفة في المجتمع أم لا بمستوى معنوية 5%

علما بأن : D(24)=0.319 , D(15)=0.255

الحـــــــل :

أولاً : شروط التطبيق :

1 - حجم العينة (n) أو مجموع التكرارات أقل من 30 (24 <30) أو

2 - التكرار المتوقع = مجموع التكرارات /عدد التكرارات $\hat{k} = \frac{24}{6} = 4 < 5$

تحقق الشرطين أو احدهما يستخدم اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة.

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي H_0 : لا يوجد اختلاف جوهري بين التكرار المرصود والتكرار المتوقع

(2) الفرض البديل H_A : يوجد اختلاف جوهري بين التكرار المرصود والتكرار المتوقع

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) مقياس الإحصائي المناسب : اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة واحدة

$$D_{calc} = \frac{\max|\hat{k}_m - k_m|}{\Sigma k} = \frac{3.00}{24} = 0.125$$

	k	$\hat{k}$	k_m	$\hat{k}_m$	$\lvert\hat{k}_m - k_m\rvert$
	2	4	2	4	-2
	3	4	5	8	-3 max
	4	4	9	12	-3
	5	4	14	16	-2
	3	4	17	20	-3
	7	4	24	24	0
sum	24	24			

D(24)=0.319 (from table , degree of freedom =n = 24)

D_{calc} < D

القـــرار:

يقبل الفرض الأصلي ويرفض الفرض البديل.

جدول (11)

جدول القيم الحرجة لإختبار كولموجروف – سميرنوف:

	One-tailed test (طرف واحد)		Two-tailed Test (طرفين)	
N	**0.05**	**0.01**	**0.05**	**0.01**
1	0.9500	0.9900	0.9750	0.9950
2	0.7764	0.9000	0.8419	0.9293
3	0.6360	0.7846	0.7076	0.8290
4	0.5652	0.6889	0.6239	0.7342
5	0.5094	0.6272	0.5633	0.6685
6	0.4680	0.5774	0.5193	0.6166
7	0.4361	0.5384	0.4834	0.5758
8	0.4096	0.5065	0.4543	0.5418
9	0.3875	0.4796	0.4300	0.5133
10	0.3687	0.4566	0.4092	0.4889
11	0.3524	0.4367	0.3912	0.4677
12	0.3382	0.4192	0.3754	0.4490
13	0.3255	0.4036	0.3614	0.4325
14	0.3142	0.3897	0.3489	0.4176
15	0.3040	0.3771	0.3376	0.4042
16	0.2947	0.3657	0.3273	0.3920
17	0.2863	0.3553	0.3180	0.3809
18	0.2785	0.3457	0.3094	0.3706
19	0.2714	0.3369	0.3014	0.3612
20	0.2647	0.3287	0.2941	0.3524

تابع جدول (11)

جدول القيم الحرجة لإختبار كولموجروف – سميرنوف:

	One-tailed test (طرف واحد)		Two-tailed Test (طرفين)	
21	0.2586	0.3210	0.2872	0.3443
22	0.2528	0.3139	0.2809	0.3367
23	0.2475	0.3073	0.2749	0.3295
24	0.2424	0.3010	0.2693	0.3229
25	0.2377	0.2952	0.2640	0.3166
26	0.2332	0.2896	0.2591	0.3106
27	0.2290	0.2844	0.2544	0.3050
28	0.2250	0.2794	0.2499	0.2997
29	0.2212	0.2747	0.2457	0.2947
30	0.2176	0.2702	0.2417	0.2899
31	0.2141	0.2660	0.2379	0.2853
32	0.2108	0.2619	0.2342	0.2809

اختبار χ^2 لاستقلال خاصيتين لعينة

يستخدم لمعرفة وجود علاقة بين أي خاصيتين من خواص المجتمع أم لا .

خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي : الخاصيتان مستقلتان

(1) الفرض البديل : الخاصيتان غير مستقلتان

(٣) تحديد مستوى المعنوية : a = %5

(1) مقياس الإحصائي المناسب : اختبار χ^2 لاستقلال خاصيتين

العمليات الحسابية :

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{(k - \hat{k})^2}{\hat{k}} \right) \quad .., \quad (104)$$

$$\hat{k} = \frac{\sum rows \,.\, \sum columns}{\sum k}$$

القـــــرار:

اذا كانت $\hat{k}$ أقل من $\hat{k}_{tab}$ عند درجة حرية = 1 دائما يقبل الفرض الصفرى ويرفض الفرض البديل والعكس صحيح.

مثـــال 1:

سحبت عينة عشوائية من 100 عامل من العاملين في أحد مصان تصنيع قطع غيار السيارات وتم تصنيفهم حسب كفاءة كل عامل وكذلك حسب الحالة التعليمية كما في الجدول التالي :

	كفء	غير كفء
متعلم	11	44
أمي	29	16

المطلوب:

معرفة هل هناك ارتباط بين كفاءة العامل وحالته التعليمية بفرض أن مستوى المعنوية 5% ، إذا علمت أن :

$\chi_1^2 = 3.84$, $\chi_2^2 = 5.99$

الحـــل:

خطوات الاختبار :

(1) الفرض الصفرى : الخاصيتان مستقلتان

(1) الفرض البديل : الخاصيتان غير مستقلتان

(٣) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 0.05$

(1) مقياس الإحصائي المناسب : اختبار χ^2 لاستقلال خاصيتين

العمليات الحسابية :

	كفء	غير كفء	sum
متعلم	11	44	55
امى	29	16	45
sum	40	60	100

	k	$\hat{k}$	$k-\hat{k}$	$(k-\hat{k})^2$	$\frac{(k-\hat{k})^2}{\hat{k}}$
	11	22	-11	121	5.50
	44	33	11	121	3.67
	29	18	11	121	6.72
	16	27	-11	121	4.48
sum	100	100	0		20.37

$$\chi^2{}_{cal} = \sum\left(\frac{(k-\hat{k})^2}{\hat{k}}\right) = 20.37$$

$$\hat{k} = \frac{\sum rows \,.\, \sum columns}{\sum k}$$

$$\chi^2{}_{tab} = 3.84\ (degree\ of\ freedpm = 1)$$

القـــــرار:

$\chi^2{}_{cal}$ اكبر من $\chi^2{}_{tab}$ يرفض الفرض الصفري ويقبل الفرض البديل أي أن الخاصيتان غير مستقلتان.

اختبار كلمجروف سميرنوف لعينتين

يستخدم للمقارنة بين تكرارات عينتين متساويتي. الحجم لمعرفة ما إذا كان هناك اختلاف جوهري بين مجتمعي العينتين أم لا.

أولاً : شروط التطبيق :

حجم العينة الأولى $n_1 \leq 40$ ، حجم العينة الثانية $n_2 \leq 40$ ، البيانات على صورة تكرارات.

ثانياً : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي : لا يوجد اختلاف جوهري بين المجتمعين.

(2) الفرض البديل : يوجد اختلاف جوهري بين المجتمعين .

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 0.05$

(4) مقياس الإحصائي المناسب : اختبار كلمجروف سميرنوف لعينتين متساويتي الحجم.

(5) العمليات الحسابية :

$$D_{calc} = \max|k_{1m} - k_{2m}| \quad .., \quad (105)$$

ثالثا : القـــــرار:

اذا كانت $D_{calc} > D_{tab} \ \ with\ degree\ of\ freedom = n_1$

يرفض الفرض الصفري (الأصلي) ويقبل الفرض البديل والعكس صحيح.

مثـــــــــــال :

سحبت عينتان عشوائيتان متساويتان من طلبة وطالبات أحد الكليات و تم رصد أطوالهم وكانت النتائج:

قنات الطول	أقل من 145	145-	155-	165-	175 فأكثر	المجموع
عدد الطلبة	2	3	5	11	4	25
عدد طالبات	8	5	6	4	2	25

المطلوب معرفة ما إذا كان هناك اختلاف جوهري بين المجتمعين بمستوى معنوية 5% علما بأن :$D_{tab}(9) = 20 \ , D_{tab}(25) = 11$

الحـــــــل:

أولاً : التحقق من الشروط :

1 - حجم العينة الأولى : $n_1 = 25 < 40$ (تكرارات)

حجم العينة الثانية: $n_2 = 25 < 40$ (تكرارات)

لذا يطبق اختبار كلمجروف سميرونوف لعينتين متساويتين في الحجم.

أستاذ المساحة والجيوديسيا
كلية الهندسة / جامعة الأزهر
essamfawaz2001@gmail.com

ثانياً : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي : لا يوجد اختلاف جوهري بين المجتمعين

(2) الفرض البديل : يوجد اختلاف جوهري بين المجتمعين

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = \%5$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختبار كلمجروف سميرنوف لعينتين متساويتين.

(5) العمليات الحسابية :

	k_1	k_2	k_{1m}	k_{2m}	$\lvert k_{1m} - k_{2m} \rvert$
	2	8	2	8	6
	3	5	5	13	8
	5	6	10	19	9 max
	11	4	21	23	2
	4	2	25	25	0
sum	25	25			

$D_{calc} = \max|k_{1m} - k_{2m}| = 9 \ , \ D_{tab}(25) = 11$

القـــــرار:

$D_{calc} < D_{tab} \ \ with\ degree\ of\ freedom = 25$

لذا يقبل الفرض الصفري (الأصلي) ويرفض الفرض البديل .

اختبار مان وتني mann - whitney

استخدامه:

يعتبر هذا الاختبار بديل للاختبار الخاص بالفرق بين متوسطي مجتمعين (اختبار t) والمبني على أساس عينتين مستقلتين أي أنهما يتبعان التوزيع العادى (الطبيعى) وتباينهما متساوى .

أولا : شروط التطبيق :

تكون المجتمعات المسحوب منها العينتين **غير موزعة توزيعا طبيعيا**

أو أن يكون تباين هذه المجتمعات غير متساوي.

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي : $H_0: \ \mu_1 = \mu_2$

(2) الفرض البديل: $H_A: \ \mu_1 \neq \mu_2$

(3) تحديد مستوى المعنوية : $a = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختيار مان ويتني تعينتين

ثالثا : العمليات الحسابية :

$$m_1 = n_1.n_2 + \frac{n_1.(n_1 + 1)}{2} - r_1$$

$$m_2 = n_1.n_2 + \frac{n_2.(n_2 + 1)}{2} - r_2$$

$$m_{calc} = \min value\ of\ m_1\ and\ m_2 \ , \qquad (106)$$

حيث :

n_1: حجم العينة الأولى ، n_2: حجم العينة الثانية

r_1: مجموع رتب العينة الأولى ، r_2 : مجموع رتب العينة الثانية

يتم ترتيب قيم العينتين معا ترتيبا تصاعديا

العينة الأولى	الرتب	العينة الثانية	الرتب
...	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...
مجموع	r_1		r_2

القـــــــرار:

اذا كانت $m_{calc} > \ m_{tab}\ at\ degree\ of\ freedom = n_1, n_2$

(الاختبار الوحيد المعاكس لباقي الاختبارات) يتم قبول الفرض الأصلي ورفض الفرض البديل أي يوجد اختلاف جوهري بين متوسطي المجتمعين والعكس صحيح.

مثـــال 1:

في دراسة عن الفرق بين مستويات الطلبة والطالبات بإحدى الكليات تم اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين من الطلبة والطالبات فكانت كما يلي :

درجات الطلبة	3	10	5	7	4	9
درجات الطالبات	5	8	6	5	2	10

المطلوب:

اختبار ما إذا كان هناك فرق جوهري بين متوسطي درجات الطلبة والطالبات بمستوى معنوية 5% بفرض أن المجتمعات لا تتبع التوزيع الطبيعي ، $m_{tab}(6,6) = 5$, $m_{tab}(7,7) = 8$

الحـــــل:

أولا : شروط التطبيق :

حيث أن العينتان مستقلتان والمجتمعان المسحوب منهما العينتان لا يتبعان التوزيع الطبيعي *normal distribution* ، فيكون الاختيار المناسب هو اختبار مان ويتني لعينتين mann - whitney

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي : $H_0: \ \mu_1 = \mu_2$

(2) الفرض البديل : $H_A: \ \mu_1 \neq \mu_2$

(3) تحديد مستوى المعنوية : $a = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختيار مان ويتني تعينتين

ثالثا : العمليات الحسابية :

يتم ترتيب قيم العينتين معا ترتيبا تصاعديا

	تصاعدى	رتب	
3	2	1	
10	3	2	
5	4	3	
7	5	4	5
4	5	5	5
9	5	6	5
5	6	7	
8	7	8	
6	8	9	
5	9	10	
2	10	11	11.5
10	10	12	11.5

للعينة الأولى	الرتب	العينة الثانية	الرتب
3	2	5	5
10	11.5	8	9
5	5	6	7
7	8	5	5
4	3	2	1
9	10	10	11.5
مجموع	39.5		38.5

$$m_1 = n_1.\ n_2 \ + \ \frac{n_1.(n_1 \ + 1)}{2} \ - \ r_1 = 6x6 + \frac{6x7}{2} - 39.5 = 17.5$$

$$m_2 = n_1.\ n_2 \ + \ \frac{n_2.(n_2 \ + 1)}{2} \ - \ r_2 \ = 6x6 - \frac{6x7}{2} \ - 38.5 = 18.5$$

حيث : r_1: مجموع رتب العينة الأولى ، r_2 : مجموع رتب العينة الثانية

$$m_{calc} \ = \ \min value\ of\ m_1 \ and m_2 \ = 17.5 > m_{tab}(6,6) = 5$$

القـــــــرار:

يتم قبول الفرض الصفري ورفض الفرض البديل أي لايوجد اختلاف جوهري بين متوسطي المجتمعين .

(الاختبار الوحيد المعاكس لباقي الاختبارات لقبول أو رفض الفرض الصفرى)

مثـــــــأل 2:

في دراسة عن استهلاك نوعين من الزيوت سحب عينة من مشتري كل نوع وتسجيل عدد اللترات لكل مشتري فكانت كالتالي:

النوع الأول	23	10	22	11	20	70	50	30			
النوع الثاني	80	60	75	40	60	65	55	30	90	85	30

المطلوب:

اختبار ما إذا كان هناك فرق جوهري بين متوسطين مبيعات النوعين بمستوى معنوية 5% ، بفرض أن المجتمعات لا تتبع التوزيع الطبيعي ، وكانت $m_{tab}(11,11) = 30$, $m_{tab}(8,11) = 19$

الحـــــل:

أولا : شروط التطبيق :

حيث أن العينتان مستقلتان والمجتمعان المسحوب منهما العينتان لا يتبعان التوزيع الطبيعي *normal distribution* ، فيكون الاختيار المناسب هو اختبار مان ويتني لعينتين mann - whitney

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي : $H_0: \ \mu_1 = \mu_2$

(2) الفرض البديل : $H_A: \ \mu_1 \neq \mu_2$

(3) تحديد مستوى المعنوية : $a = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختيار مان ويتني تعينتين

ثالثا : العمليات الحسابية :

يتم ترتيب قيم العينتين معا ترتيبا تصاعديا

	تصاعدى	رتب
23	10	1
10	11	2
22	20	3
11	22	4
20	23	5
70	30	7
50	30	7
30	30	7
80	40	9
60	50	10
75	55	11
40	60	12.5
60	60	12.5
65	65	14
55	70	15
30	75	16
90	80	17
85	85	18
30	90	19

العينة الأولى	الرتب	العينة الثانية	الرتب
23	5	80	17
10	1	60	12.5
22	4	75	16
11	2	40	9
20	3	60	12.5
70	15	65	14
50	10	55	11
30	7	30	7
		90	19
		85	18
		30	7
مجموع	**47**		**143**

$$m_1 = n_1.\ n_2\ + \frac{n_1.(n_1\ +1)}{2} - r_1 = 8x11 + \frac{8x9}{2} - 47\ \ =\ \ 77$$

$$m_2 = n_1.\ n_2\ +\ \frac{n_2.(n_2\ +1)}{2}\ -\ r_2 = 8x11 - \frac{11x12}{2}\ - 143 = 11$$

حيث كان حجم العينة الأولى 8 ، حجم العينة الثانية 11

$$m_{calc}\ =\ \min value\ of\ m_1\ \ and\ \ m_2\ = 11$$

$$m_{tab}(8,11) = 19$$

$$m_{calc}\ <\ m_{tab}$$

القـــــرار: يتم رفض الفرض الأصلي و قبول الفرض البديل أي يوجد اختلاف جوهري بين متوسطي المجتمعين .

مثـــــــال 3:

اختيرت عينتان حجم كل منهما على التوالي 12 ، 15 طالب في احدى المدارس لدراسة الفرق في درجات العينتين فكان مجموع رتب العينة الأولى = 140 ومجموع رتب العينة الثانية = 150 ، والمطلوب اختبار ما إذا كان هناك فرق جوهري بين درجات العينتين بمستوى معنوية 5% وذلك بفرض أن المجتمعات المسحوب منها العينات **لا تتبع التوزيع الطبيعي** ، إذا علمت أن : $m_{tab}(12,15) = 49$

الحـــــل:

أولا : شروط التطبيق :

حيث أن العينتان غير متساويتى في الحجم ، والمجتمعان المسحوب منهما العينتان لا يتبعان التوزيع الطبيعي *normal distribution* ، فيكون الاختيار المناسب هو اختبار مان ويتني لعينتين mann - whitney

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي : $H_0: \ \mu_1 = \mu_2$

(2) الفرض البديل : $H_A: \ \mu_1 \neq \mu_2$

(3) تحديد مستوى المعنوية : $a = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختيار مان ويتني تعينتين

ثالثا : العمليات الحسابية :

$$m_1 = n_1.n_2 + \frac{n_1.(n_1 + 1)}{2} - r_1 = 12x15 + \frac{12x13}{2} - 140 = 118$$

$$m_2 = n_1.n_2 + \frac{n_2.(n_2 + 1)}{2} - r_2 = 12x15 + \frac{15x16}{2} - 150 = 160$$

$$m_{calc} = \min value\ of\ m_1\ and\ m_2 = 118$$

$$m_{tab}(12,15) = 49$$

القــرار:

$$m_{calc}(118) > m_{tab}(49)\ at\ degree\ of\ freedom = n_1, n_2$$

يتم قبول الفرض الأصلي ورفض الفرض البديل أي لا يوجد اختلاف جوهري بين متوسطي المجتمعين .

اختبار كروسكال واليس

يستخدم اختبار كروسكال واليس **في حالة وجود أكثر من عينتين (أكثر من مجتمعين)** لمقارنة متوسطات رتب المجموعات المستقلة عندما **لا تتبع البيانات التوزيع الطبيعي أو في حالة عدم تساوى التباينات** . يعتبر هذا الاختبار بديلاً لاختبار تحليل التباين في اتجاه واحد(حيث يكون التوزع عادى والتباينات متساوية).

شروط التطبيق

- لا تكون المجتمعات موزعة توزيعاً طبيعياً.
- يكون تباين هذه المجتمعات غير متساوي.
- عدم معرفة أي معلومات عن شكل المجتمعات المسحوب منها العينة.

خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي : لا يوجد اختلاف جوهري بين متوسط المجتمعات.
(2) الفرض البديل : يوجد اختلاف جوهري بين متوسط المجتمعات.
(3) تحديد مستوى المعنوية : $a = 5\%$
(4) المقياس الإحصائي المناسب : اختبار كروسكال واليس)
(5) العمليات الحسابية :

$$\chi^2{}_{cal} = \frac{12}{N(N+1)}\ x\left[\frac{{r_1}^2}{n_1} + \frac{{r_2}^2}{n_2} + \ \ldots\right] - 3(N+1)\ldots,(107)$$

$$N = n_1 + n_2 + \cdots..$$

r_1: مجموع رتب العينة الأولى ، r_2 : مجموع رتب العينة الثانية ، .....
(ترتيب العينات تصاعديا معا)

$$\chi^2{}_{tab}\ \ at\ (degree\ of\ freedpm = number\ of\ samples - 1)$$

القـــرار:

اذا كانت $\chi^2{}_{cal} < \chi^2{}_{tab}$: يتم قبول الفرض الاصلى ورفض الفرض البديل أي أنه لايوجد اختلاف جوهري بين متوسط المجتمعات والعكس صحيح .

مثـــال 1:

سحبت اربعة عينات عشوائية من طلاب إحدى الكليات احجامها 6 ،6 ،3 ،5 من أربعة شعب مختلفة ورصدت درجاتهم في امتحان مادة ما ثم رتبت فكانت مجموع رتب كل عينة 60 ،40 ، 90 ، 80 على التوالي المطلوب وكان المطلوب معرفة ما إذا كان هناك اختلاف جوهري في متوسطات الطلاب في الشعب المختلفة ، علما بأن :

$$\chi^2{}_{tab}\ \ at\ (degree\ of\ freedpm = 3)\ \ =\ \ 7.82$$

الحـــــل:

شروط التطبيق

- عدم معرفة أي معلومات عن شكل المجتمعات المسحوب منها العينة.

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي : $H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

(2) الفرض البديل : $H_A: \ \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$

- (3)تحديد مستوى المعنوية : $a = 5\%$
- (4) المقياس الإحصائي المستعمل : **اختبار كروسكال واليس**

ثالثا : العمليات الحسابية :

$$n = n_1 + n_2 + \cdots = 6 + 6 + 3 + 5 = 20$$

$r_1 = 6$, $r_2 = 400$,$r_3 = 100$,$r_4 = 80$.

$$\chi^2{}_{cal} = \frac{12}{n(n+1)}\ x\left[\frac{{r_1}^2}{n_1} + \frac{{r_2}^2}{n_2} + \ \ldots\right] - 3(n+1)$$

$$\chi^2{}_{cal} = \frac{12}{20(20+1)}\ x\left[\frac{60^2}{6} + \frac{40^2}{6} + \ \frac{100^2}{3} + \frac{80^2}{5}\right] - 3(20+1) = 93.57$$

r_1: مجموع رتب العينة الأولى ، r_2 : مجموع رتب العينة الثانية ، .....

$$\chi^2{}_{tab} \qquad at\ (degree\ of\ freedpm = 3) \ = \ 7.82$$

القـــرار:

$\chi^2{}_{cal} > \chi^2{}_{tab}$ ، يتم رفض الفرض الاصلى وقبول الفرض البديل أي أنه يوجد اختلاف جوهري بين متوسط المجتمعات .

مثـــــــــال 2:

سحبت ثلاث عينات عشوائية من الطلبة بثلاث مدارس وتم رصد درجاتهم في مادة ما كما هو موضح بالجدول الآتي :

A	73	71	75	80	77	79		
B	60	70	70	80	90	95		
C	65	80	80	80	85	88	90	93

المطلوب:

معرفة ما إذا كان هناك اختلاف جوهري في درجات الطلبة للعينات الثلاثة ام لا ، اذا علم أن مستوى المعنوية 5% ، وذلك بفرض أن المجتمعات المسحوب منها العينات لا تتبع التوزيع الطبيعي إذا علمت أن :

$$\chi^2_{\ tab}\ at\ (degree\ of\ freedpm = 2)\ =\ 5.99$$

الحـــــل:

أولا: شروط التطبيق

- أكثر من مجتمعين ، المجتمعات غير موزعة توزيعاً طبيعياً.
- تباين هذه المجتمعات غير متساوي.
- عدم معرفة أي معلومات عن شكل المجتمعات المسحوب منها العينة.

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي : $H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots$

(2) الفرض البديل : .... $H_A: \quad \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \cdots$

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 5\%$

المقياس الإحصائي المناسب : اختبار كروسكال واليس

ثالثا : العمليات الحسابية :

يتم ترتيب قيم العينات معا ترتيبا تصاعديا ، $N = n_1 + n_2 + \cdots = 6 + 6 + 8 = 20$

ترتيب تصاعدى		رتب
60	1	1
65	2	2
70	3	3.5
70	4	3.5
71	5	5
73	6	6
75	7	7
77	8	8
79	9	9
80	10	12
80	11	12
80	12	12
80	13	12
80	14	12
85	15	15
88	16	16
90	17	17.5
90	18	17.5
93	19	19
95	20	20

S1 عينة 1	الرتب r1	S2 عينة 2	الرتب r2	S3 عينة 3	الرتب r3
73	6	60	1	65	2
71	5	70	3.5	80	12
75	7	70	3.5	80	12
80	12	80	12	80	12
77	8	90	17.5	85	15
79	9	95	20	88	16
				90	17.5
				93	19
sum	47		57.5		105.5

$$\chi^2_{\ cal} = \frac{12}{N(N+1)}\ x\left[\frac{r_1{}^2}{n_1} + \frac{r_2{}^2}{n_2} + \ \ldots\right] - 3(N+1)$$

$$\chi^2_{\ cal} = \frac{12}{20(20+1)}\ x\left[\frac{47^2}{6} + \frac{57.5^2}{6} + \frac{105.5^2}{8}\right] - 3(20+1) = 3.01$$

$$\chi^2_{\ tab} \qquad at\ (degree\ of\ freedpm = 2)\ =\ 5.99$$

أستاذ المساحة والجيوديسيا
كلية الهندسة / جامعة الأزهر
essamfawaz2001@gmail.com

القـــرار:

$\chi^2{}_{cal}(3.01) < \chi^2{}_{tab}$ لذا يتم قبول الفرض الصفري ورفض الفرض البديل أي أنه لا يوجد اختلاف جوهري بين متوسط المجتمعات .

مثـــال 3:

سحبت اربعة عينات عشوائية من طلاب إحدى الكليات احجامها 6 ،6 ،3 ،5 من أربعة شعب مختلفة ورصدت درجاتهم في امتحان مادة ما ثم رتبت فكانت مجموع رتب كل عينة 60 ،40 ، 100 ، 80 على التوالي ، المطلوب معرفة ما إذا كان هناك اختلاف جوهري في متوسطات الطلاب في الشعب المختلفة ، علما بأن :

$$\chi^2{}_{tab}\ at\ (degree\ of\ freedpm = 3)\ =\ 7.82$$

الحـــــل:

شروط التطبيق

- عدم معرفة أي معلومات عن شكل المجتمعات المسحوب منها العينة.

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الصفرى : $H_0:\ \ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

(2) الفرض البديل : $H_A:\ \ \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$

(3) تحديد مستوى المعنوية : $a = 5\%$

(4) المقياس الإحصائي المستعمل : **اختبار كروسكال واليس**

ثالثا : العمليات الحسابية :

$$N = n_1 + n_2 + \cdots = 6 + 6 + 3 + 5 = 20$$

r_1 =60 , r_2 =40 ,r_3 =100 ,r_4 =80 .

$$\chi^2{}_{cal} = \frac{12}{N(N+1)}\ x\left[\frac{{r_1}^2}{n_1} + \frac{{r_2}^2}{n_2} + \ \ldots\right] - 3(N+1)$$

$$= \frac{12}{20(20+1)}\ x\left[\frac{60^2}{6} + \frac{40^2}{6} + \ \frac{100^2}{3} + \frac{80^2}{5}\ \right] - 3(20+1) = 93.57$$

r_1 ، مجموع رتب العينة الأولى : r_2 ، مجموع رتب العينة الثانية : .....

$$\chi^2{}_{tab} \qquad at\ (degree\ of\ freedpm = 3)\ =\ 7.82$$

القـــــــــــرار:

$$: \chi^2{}_{cal} > \chi^2{}_{tab}$$

لذا يتم رفض الفرض الصفرى وقبول الفرض البديل أي أنه يوجد اختلاف جوهري بين متوسط المجتمعات

أهم شروط استخدام احتبار تحليل التباينات ANOVA :

1 - أن يكون هناك ثلاث مجتمعات أو أكثر.

2 - أن تكون المجتمعات موزعة توزيعا طبيعيا. أي تتبع التوزيع الطبيعي.

3 - أن تكون المجتمعات ذات تباين متساوي.

أ - اختبارات التوزيع الطبيعى للبيانات:

1 – تعيين معاملي الالتواء والتفلطح.
2 – اختبار كولموجروف سميرونوف.
3 - اختبار شابيرو ويلك.
4 – Q – Q Plot ، P-P plot

ب - التحقق من **تساوي التباينات:**

Homogeneity of Variances بين مجموعتين أو أكثر.
اختبار ليفين Levene's Test

أ - اختبارات التوزيع الطبيعى للبيانات Checking of Normality

كما سبق ذكره فإنه يجب التأكد من أن الأرصاد تتبع التوزيع الطبيعي المعياري (المتوسط الحسابي = 0 والانحراف المعياري = 1 ، حيث إنها من الاشتراطات الواجب توافرها لإجراء اختبار تحليل التباينات ANOVA ، ويمكن التأكد من توزيع الأرصاد توزيعا طبيعيا إما حسابيا analytical أو بيانيا graphical.

من الاختبارات التي تجرى للتأكد من التوزيع الطبيعي للبيانات:

1 – تعيين معاملي الالتواء والتفلطح.
2 – اختبار كولموجروف سميرونوف.
3 - اختبار شابيرو ويلك.
4 – Q – Q Plot ، P-P plot

1 – تعيين معاملى الالتواء والتفرطح

Coefficients of Skewness and Kurtosis

هي مقاييس لشكل المنحنى التكراري الذي نحصل عليه من مجموعة أرصاد بالنسبة للمنحنى الطبيعي (العادي) Normal curve .
يلاحظ أن :

المنحنى الطبيعى هو منحنى على شكل قوس يصل ارتفاعه الى نهايته العظمى في منتصفه ويقترب من المحور الافقى تدريجيا بشكل متماثل من الجانبين (منحنى جاوس). ويمكن الوصول لهذا المنحنى فى حالة زيادة عدد الارصاد الى مالانهاية .

التوزيع الطبيعي المعياري هو منحنى ذو متوسط $\mu = 0$ وانحراف معيارى σ ويمتاز بخاصية هامة وهى أن:

68.2% من البيانات تقع في نطاق $\pm\sigma$ من الوسط الحسابي $(\mu = 0)$

95.4% من البيانات تقع في نطاق $\pm 2\sigma$ من الوسط الحسابي $(\mu = 0)$

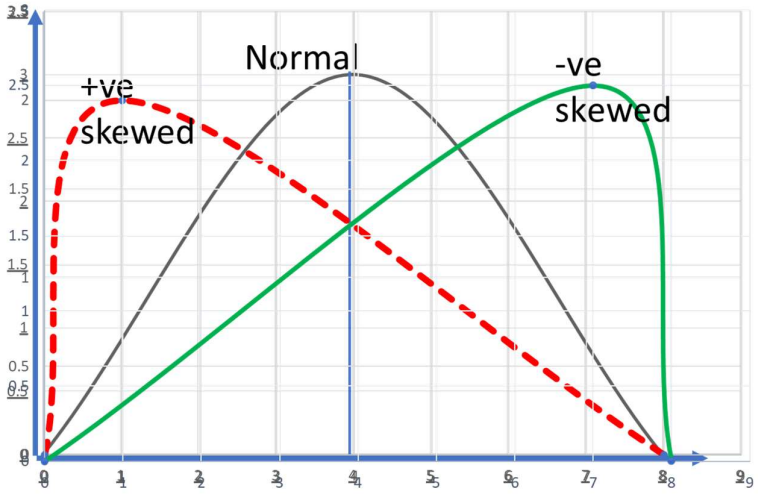
99.7% من البيانات تقع في نطاق $\pm 3\sigma$ من الوسط الحسابي $(\mu = 0)$

أ - معامل الالتواءskewness

المقصود به التواء منحنى الأرصاد يمينا أو يسارا بالنسبة للمنحنى الطبيعي ، فلمجموعة محدودة من الارصاد قد يكون الطرف الايمن للمنحنى التكراري ممتد أكثر من طرفه الايسر ويسمى المنحنى ملتو لجهة اليمين (معامل الالتواء skewness يكون موجبا).

وقد يحدث العكس فيسمى المنحنى ملتو لجهة اليسار وذلك بالنسبة للمنحنى الطبيعي Normal Curve (معامل الالتواء skewness يكون سالبا).

أما اذا كانت قيمة المعامل مساوية للصفر، كان المنحنى متماثلا. كما هو مبين في شكل (19).



شكل (19)

يمكن حساب معامل الالتواء B_1 بمعلومية الوسط الحسابي $\bar{x}$ والوسيط Median والانحراف المعياري s أو المنوال Mode من العلاقات :

$$B_1 = \frac{\bar{x} - Mode}{s} \quad \text{(معامل بيرسون الأول)} \quad \ldots (108a)$$

$$B_1' = \frac{3(\bar{x} - Median)}{s} \quad \text{(معامل بيرسون الثانى)} \quad \ldots (108b)$$

مثـــــال :

إذا علم أن المتوسط الحسابي $\bar{x}$ = 90.80 ، والوسيط Median =90.49 والانحراف المعياريSt. deviation = 14.04. المطلوب تعيين معامل الالتواء.

الحـــــل :

$$B_1 = \frac{3(\bar{x} - median)}{s} = \frac{3(90.8 - 90.49)}{14.04}$$
$$= 0.066 > 0 \quad skewness\ to\ the\ right$$

وباعتبار $\bar{x}$: المتوسط الحسابي ، σ : الانحراف المعياري ،

$m_1 = \frac{\sum(x-\bar{x})}{n}$:العزم الاول حول الوسط الحسابي ،

$m_2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} = \sigma^2$:العزم الثانى حول الوسط الحسابي (التباين) ،

$m_3 = \frac{\sum(x-\bar{x})^3}{n}$:العزم الثالث حول الوسط الحسابى ،

$m_4 = \frac{\sum(x-\bar{x})^4}{n}$:العزم الرابع حول الوسط الحسابى ،

يمكن تعيين معامل الالتواء $B1$ باستخدام العزوم حول المتوسط الحسابي من العلاقة :

$$B_1'' = \frac{m_3}{\sigma^3} \quad \ldots (109)$$

مثـــــــال :

إذا علم أن: $m_3 = 8.9$, $m_2 = 8.7$ ، المطلوب تعيين معامل الالتواء.

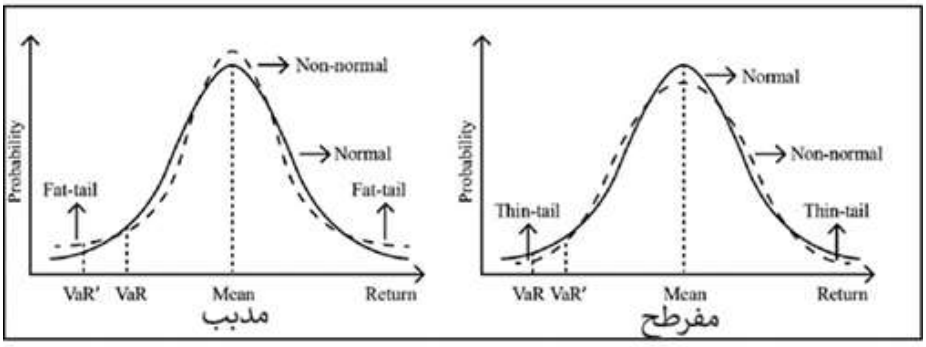
الحـــــــل :

$\sigma = \sqrt{m_2}$ = 2.9495 ,$B_1'' = \frac{m_3}{\sigma^3} = 0.346 > 0$

$skewness\ to\ the\ right$

ب - مقاييس التفرطح Measures of Kurtosis

المنحنيات التكرارية تختلف من جهة شكل قمة المنحنى ، فقد يكون المنحنى مفرطح أو مدبب وذلك بالنسبة للمنحنى الطبيعي Normal Curve كما هو مبين في شكل (20).



شكل (20)

ويمكن حساب معامل التفرطح B_2 $coefficient\ of\ kurtosis$ من العلاقة :

$$B_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} \quad \text{Pearson kurtosis } .., (110a)$$

حيث:

$$\sigma = \sqrt{m_2} \quad , \quad m_2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} \quad , \quad m_4 = \frac{\sum(x-\bar{x})^4}{n}$$

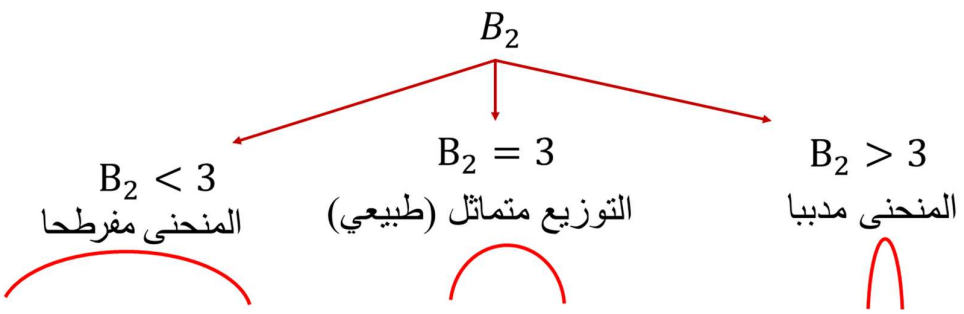
وهى قيمة ليس لها وحدات ، وتقارن هذه القيمة بتفرطح المنحنى الطبيعى normal curve والذى معامل التفرطح له يساوى 3 .

قد يتم حساب معامل التفرطح من العلاقة التالية:

$$B_2' = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 \quad \text{Excess kurtosis } .., (110b)$$

وتقارن هذه القيمة بتفرطح المنحنى الطبيعى normal curve والذى معامل التفرطح له يساوى 0 .

ويتحدد شكل المنحنى بالنسبة للتفرطح:



شكل (21)

مثـــــــــال:

إذا علم أن $m_1 = 10\,,\ m_2 = 200\ ,\ m_3 = 100\,,\ m_4 = 500$

المطلوب تعيين معامل الالتواء والتفلطح .

الحـــــــــل :

$\sigma = \sqrt{200} = 14.1421$

معامل الالتواء: $B_1'' = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{100}{14.142^3} = .0354$

المنحنى ملتو لجهة اليمين

معامل التفلطح: $B_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{500}{14.142^4} = 0.0125 < 3$

المنحنى (منبسط) مفرطح

مثـــال 2 :

اوجد معامل الالتواء والتفلطح للأرصاد المبينة:

x	20	25	25	30	35	40

الحـــل:

	x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^3$	$(x-\bar{x})^4$
	20	-9.167	84.03	-770.3	7061
	25	-4.167	17.36	-72.34	301.4
	25	-4.167	17.36	-72.34	301.4
	30	0.833	0.694	0.579	0.482
	35	5.833	34.03	198.5	1158
	40	10.83	117.4	1271	13774
Σ	175	0	270.8	555.6	22595
n	6				
		m_1	m_2	m_3	m_4
$\bar{x} = \Sigma/n$	29.17		45.14	92.59	3766
		σ	6.719		

$$B_1'' = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{92.59}{6.719^3} = 0.305 > 0$$

الالتواء جهة اليمين.

$$B_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{3766}{6.719^4} = 1.848 < 3$$

المنحنى مفرطح.

Check of Normality التأكد من طبيعية الأرصاد بواسطة χ^2

لبيانات المثال السابق وكماسبق ذكره فى اختبار χ^2 :

$$expected \quad \hat{k} = \frac{sum}{n} = \frac{175}{6} = 29.17 > 5$$

K =175 > 30

k	175	>	30			
$\hat{k}$	29.17	>	5		kai square	
	k	$\hat{k}$	K-$\hat{k}$	(K-$\hat{k}$)^2/$\hat{k}$		
	20	29.167	-9.167	-0.31429		
	25	29.167	-4.167	-0.14286		
	25	29.167	-4.167	-0.14286		
	30	29.167	0.8333	0.028571		
	35	29.167	5.8333	0.2		
	40	29.167	10.833	0.371429		
						χ^2_{tab}(0 .05,5)
sum	175	175	χ^2_{cal} =	1.37E-07	<	11.07
					accept	

البيانات التالية من مكروسوفت اكسيل وهى متطابقة مع ماسبق استنتاجه:

Mean	29.1667	
Standard Error	3.0046	
Median	27.5	
Mode	25	
Standard Deviation	7.359801	
Sample Variance	54.1667	
Kurtosis	-0.8592	< 0 Exces
Skewness	0.418072	right

Range	20
Minimum	20
Maximum	40
Sum	175
Count	6
Largest(1)	40
Smallest(1)	20
Confidence Level(95.0%)	7.7236

Skewness = 0.418 قيمة قريبة نسبيًا من الصفر، وهذا يشير إلى أن التوزيع يميل قليلًا لليمين لكنه ليس شديد الالتواء .

Excess Kurtosis = 0.859 ليست قريبة جدًا من الصفر، مما يشير إلى اختلاف في التفلطح عن التوزيع الطبيعي .

عدد الارصاد = 6 فقط وهذا عدد صغير جدًا، لذلك يصعب الحكم على الطبيعية بدقة .

من ذلك يمكن استنتاج أن البيانات قد تكون مقبولة تقريبًا كبيانات طبيعية من ناحية الالتواء، لكن الأفضل إجراء اختبارات اخرى مثل Shapiro-Wilk خصوصًا لأن n=6 .

2 – اختبار كولموجروف سميرونوف.

وقد سبق بيانه.

اولا : شروط تطبيقه :

1 - حجم العينة (n) أو مجموع التكرارات أقل من 30 أو

2 - التكرار المتوقع = مجموع التكرارات /عدد التكرارات <5

بتحقق أحد الشرطين يستخدم اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي H_0: لا يوجد اختلاف جوهري بين التكرار المرصود والتكرار المتوقع

(2) الفرض البديل H_A: يوجد اختلاف جوهري بين التكرار المرصود والتكرار المتوقع

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) مقياس الإحصائي المناسب : اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة

مثـــال 1: المطلوب اختبار تبعية الأرصاد المبينة بالجدول التالي للتوزيع الطبيعي .

الرصدة	X	4	7	6	5	مجموع
التكرار	k	2	7	8	8	25

الحـــــــل :

أولاً : شروط تطبيق اختبار كلمجروف، سميرنوف :

1- حجم العينة (n) أو مجموع التكرارات أقل من 30 (30> 25) أو

2 - التكرار المتوقع = مجموع التكرارات /عدد التكرارات

$$\hat{k} = \frac{25}{4} = 6.25 \quad > 5$$

بتحقق احد الشرطين يستخدم اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة

ثانيا : خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي H_0: لا يوجد اختلاف جوهري بين التكرار المرصود والتكرار المتوقع

(2) الفرض البديل H_A: يوجد اختلاف جوهري بين التكرار المرصود والتكرار المتوقع

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) مقياس الإحصائي المناسب : اختبار كلمجروف، سميرنوف لعينة

(5) العمليات الحسابية : تجرى كما بالجدول التالي :

		تكرار مرصود	تكرار مرصود متجمع	تكرار مرصود متجمع %	تكرار نظرى	تكرار نظرى متجمع	تكرار نظرى متجمع %	الفرق	القيمة المطلقة للفرق	اكبر قيمة مطلقة للفرق	
	x	k	k_m	$k_m\%$	$\hat{k}$	$\hat{k}_m$	$\hat{k}_m\%$	$k_m\%-\hat{k}_m\%$	abs. value		
	4	**2**	2	0.08	25/4=6.25	6.25	0.25	-0.17	0.17	0.17	max dif.
	7	**7**	9	0.36	6.25	12.5	0.5	-0.14	0.14		.
	6	**8**	17	0.68	6.25	18.75	0.75	-0.07	0.07		
	5	**8**	25	1	6.25	25	1	0	0		
sum		25			25						
	n	f_t									
	4	6.25									

$$D_{calc} = \frac{\max|\hat{k}_m - k_m|}{\Sigma k} = \frac{0.17}{25} = 0.0068,\ D(25)=0.261 \text{ (from table , degree of freedom =n = 25)}$$

$D_{calc}(0.0068) < D_{tab}(0.261) \quad \therefore Accept\ H_0$

القـــــــــــــرار:

قبول الفرض الصفرى أي أن أرصاد العينة لايختلف عن التوزيع النظرى (أي يتبع التوزيع الطبيعى).

3 – اختبار شابيرو ويلك Shapiro-Walk

اختبار شابيرو-ويلك (Shapiro-Wilk) يقيس مدى اقتراب البيانات من التوزيع الطبيعي، وهو فعال للعينات الصغيرة (n<50 الى 200). يعتمد على ترتيب البيانات تصاعدياً، وحساب متوسط العينة، واستخدام معامل من جداول خاصة، لحساب المقياس W_{cal} ومقارنتها بـالقيمة الحرجة W_{tab}.

خطوات إجراء اختبار شابيرو-ويلك :

1 - ترتيب البيانات: قم بترتيب العينة ($x_1 x_n$ ..... x_2 , x_1) تصاعدياً ($x_1 < x_2 <$ ....).

2 - حساب المتوسط للعينة $\bar{x}$ ، ومجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط SS.

$$SS = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \quad .., \qquad (111)$$

3 - تحديد المعاملات (a_i): باستخدام جداول Shapiro-Wilk القياسية بناءً على حجم العينة n للحصول على المعاملات a_i المقابلة.

4 - حساب المعامل b من العلاقة:

$$b = \sum_{i=1}^{m} a_i (x_{n-i+1} - x_i) \quad .., \qquad (112)$$

حيث:

$$m = \frac{n-1}{2} \text{ for odd numbers}, \qquad m = \frac{n}{2} \qquad \text{for even numbers.}$$

5 - حساب المقياس الإحصائي (W_{cal}):

$$W_{cal} = \frac{b^2}{SS} \quad ., \qquad (113)$$

تتراوح قيمة W_{cal} دائما بين الواحد والصفر.

إذا كانت النتيجة قريبة من الواحد، هذا يعني أن البيانات تتبع التوزيع الطبيعي.

تقارن قيمة W_{cal} المحسوبة بالقيمة الحرجة في جدول قيم W_{tab} الحرجة عند مستوى دلالة 0.05 ، فإذا كانت القيمة أقل من القيمة الجدولية W_{tab} فهذا يعني أن البيانات لا تتبع التوزيع الطبيعي.

اذا كان حجم العينة أكبر من 50 يفضل استخدام اختبار كولموغروف-سميرنوف أو معادلة شابيرو المطورة).
ثوابت شابيرو – ويلك a_i للعينات ذات الاحجام المختلفة مبينة فى جدول (12) ، جدول (13) يبين القيم الحرجة للمقياس W .

جدول (12)

ثوابت شابيرو-ويلك (a_i) للعينات من 3 إلى 10:

n	$n=10$	$n=9$	$n=8$	$n=7$	$n=6$	$n=5$	$n=4$	$n=3$
0.	0.5739	0.5888	0.6052	0.6233	0.6431	0.6646	0.6872	0.7071
0.	0.3291	0.3244	0.3164	0.3031	0.2806	0.2413	0.1677	-
0.	0.2141	0.1976	0.1743	0.1401	0.0875	-	-	-
0.	0.1224	0.0947	0.0561	-	-	-	-	-
0.	0.0399	-	-	-	-	-	-	-

تابع جدول (12)

ثوابت شابيرو-ويلك (a_i) للعينات من 15 إلى 50 :

i	$n = 15$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
1	0.5150	0.4734	0.4254	0.3940	0.3751
2	0.3306	0.3211	0.2944	0.2719	0.2574
3	0.2495	0.2565	0.2487	0.2357	0.2260
4	0.1878	0.2085	0.2148	0.2091	0.2032
5	0.1353	0.1686	0.1870	0.1876	0.1847
6	0.0880	0.1334	0.1630	0.1693	0.1691
7	0.0433	0.1013	0.1415	0.1531	0.1554
8	-	0.0711	0.1219	0.1384	0.1430

جدول (13)

القيم الحرجة (W) عند مستوى دلالة 0.05:

W	n	W	n	W	n	W	n
0.939	39	0.923	27	0.881	15	0.767	3
0.940	40	0.924	28	0.887	16	0.748	4
0.941	41	0.926	29	0.892	17	0.762	5
0.942	42	0.927	30	0.897	18	0.788	6
0.943	43	0.929	31	0.901	19	0.803	7
0.944	44	0.930	32	0.905	20	0.818	8
0.945	45	0.931	33	0.908	21	0.829	9
0.945	46	0.933	34	0.911	22	0.842	10
0.946	47	0.934	35	0.914	23	0.850	11
0.947	48	0.935	36	0.916	24	0.859	12
0.947	49	0.936	37	0.918	25	0.866	13
0.947	50	0.938	38	0.920	26	0.874	14

مثـــال 1:

إذا كان لدينا عينة صغيرة حجمها 5 مفرداتها 20 18 12 25 15 فهل تتبع التوزيع الطبيعي أم لا؟

الحـــــل:

1 – ترتيب البيانات: قم بترتيب العينة تصاعدياً 12 15 18 20 25

2 – حساب المتوسط للعينة $\bar{x}$ ومجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط SS.

$$\bar{x}=\frac{12 + 15 + 18 + 20 + 25}{5} = 18$$

$$SS = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (111)$$

$$=(12-18)^2 + (15-18)^2 + (18-18)^2 + (20-18)^2 + (25-18)^2 = 98$$

من ثوابت جدول شابيرو ولحجم عينة 5 :

$$m = \frac{n-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$a_1 = 0.6646 \ , a_2 = 0.2413$$

حساب المعامل b (112):

$$b = \sum_{i=1}^{m} a_i(x_{n-i+1} - x_i) = 0.6646(25-12) + 0.2413(20-15) = 9.8463$$

$$W_{cal} = \frac{b^2}{SS} = \frac{9.8462^2}{98} = 0.98926$$

وهى قريبة جدا من 1 ، فيكون التوزيع يتبع التوزيع الطبيعي ، وبالرجوع الى القيم الحرجة W_{tab} نجد ان القيمة المستنتجة اكبر من القيمة الجدولية (0.762) لذا تتبع التوزيع الطبيعي .

مثـــــــال 2:

إذا كان لدينا عينة حجمها 21 مفرداتها 2 16 11 12 13 20 6 18 15 19 7 9 17 5 8 14 1 3 10 4 21 ، فهل تتبع التوزيع الطبيعي أم لا؟

الحـــــــــل:

1 – ترتيب البيانات: قم بترتيب العينة تصاعدياً 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

2 – حساب المتوسط للعينة $\bar{x}$ ومجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط SS.

$\bar{x}=\frac{1+2+3+\cdots..}{21}=11$, $SS=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$=770

ويمكن تنظيم الحل في جدول كمايلى :

$m=\frac{n-1}{2}=\frac{21-1}{2}$=10

	x_i	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_{n-i+1}-x_i)$	a_i	$a_i(x_{n-i+1}-x_i)$
	1	100	20=1-21	0.4644	9.288
	2	81	18=2-20	0.3185	5.733
	3	64	16=3-19	0.2578	4.1248
	4	49	14	0.2119	2.9666
	5	36	12	0.1736	2.0832
	6	25	10	0.1399	1.399
	7	16	8	0.1092	0.8736
	8	9	6	0.0804	0.4824
	9	4	5	0.053	0.265
	10	1	3	0.0263	0.0789
	11	0	1		
	12	1			
	13	4			
	14	9			
	15	16			
	16	25			
	17	36			
	18	49			
	19	64			
	20	81			
	21	100			
		SS			sum
sum	231	**SS = 770**		**b =**	**27.2945**
$\bar{x}$	**11**			**W_{cal}=**	**0.9675**

$W_{tab(n=21)}=0.908$, W_{cal} > W_{tab}

القـــــــــرار: الارصاد تتبع التوزيع الطبيعي .

مثـــــال 3:

إذا كان لدينا عينة حجمها 6 قيمها 10 12 14 15 17 22 ، فهل تتبع التوزيع الطبيعي أم لا؟

الحـــــــل:

1 – ترتيب البيانات: قم بترتيب العينة تصاعدياً 10 12 14 15 17 22

2 – حساب المتوسط للعينة $\bar{x}$ ومجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط SS.

$m=n/2 = 6/2 = 3$

	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_{n-i+1} - x_i)$	a_i	$a_i(x_{n-i+1} - x_i)$
	10	25	12	0.6431	16.0775
	12	9	5	0.2806	2.5254
	14	2	1	0.0875	0.0875
	15	0			
	17	4			
	22	49			
		SS			sum
sum	90	**SS = 88**		b =	18.6904
$\bar{x}$	**15**			W_{calc} =	3.96967

$$W_{cal} = \frac{b^2}{SS} = \frac{18.6904^2}{88} = 0.98926 \ , W_{tab(n=6)} = 0.788$$

القـــــــرار:

القيمة المستنتجة W_{cal} اكبر من القيمة الجدولية W_{tab} لذا تتبع الارصاد التوزيع الطبيعي .

أولًا: P–P Plot (Probability–Probability Plot)

(احتمال قيمة Cumulative Probabilities وفيه تتم عملية مقارنة بين الاحتمالات التراكمية حيث يتم حساب الاحتمال التراكمي لكل قيمة للبيانات ويقارن مع $p(a \leq x)$محددة أو أقل منها الاحتمال المتوقع من التوزيع النظري (بمعنى بمعلومية القيمة يمكن تعيين الاجتمال المقابل لها).

فإذا كانت النقاط على خط مستقيم ،تكون البيانات تابعة للتوزيع المطلوب.

إذا انحرفت عن الخط المستقيم يكون ذلك دليل على وجود اختلاف.

تعتبر هذه الطريقة مناسبة لمقارنة التوزيعات بشكل عام وان كان يعيبها أنها أقل حساسية للقيم المتطرفة(Outliers).

ثانيا : Q–Q Plot (Quantile –Quantile Plot)

وفيه تتم عملية مقارنة بين القيم Quantile (حيث يمكن تعيين القيمة المقابلة بمعلومية الاحتمال). ويتم ترتيب البيانات وتجرى المقارنه بين القيم الفعلية مع القيم المتوقعة من التوزيع النظري.اذا وقعت القيم الفعلية والقيم النظرية على خط مستقيم دل ذلك على أن البيانات تتبع التوزيع النظري .

تعتبر هذه الطريقة أفضل لاكتشاف القيم المتطرفة وانحرافاتها.

توضيح : معنى quantile at 60% تعنى القيمة التي يقع أسفلها 60% من البيانات . من أمثلة ذلك:

Quantile= 0.5 معناها القيمة التي يقع تحتها 50% من البيانات وهى الوسيط Median .

Quantile= 0.25 معناها القيمة التي يقع تحتها 25% من البيانات 1^{st} Quantile.

Quantile= 0.75 معناها القيمة التي يقع تحتها 75% من البيانات3^{rd} Quantile.

خطوات الحل باستخدام مايكروسوفت أكسل:

1 – ادخال البيانات Data

2 – ايجاد الرتبRank

3 – حساب الاحتمالات التجريبية $p_i = \frac{B2-0.5}{n}$ .., (114)

4 – حساب القيم المتوقعة من التوزيع الطبيعى (النظرية Theoretical) .

5 – حساب المتوسط m، والانحراف المعياري s في أي خلية.

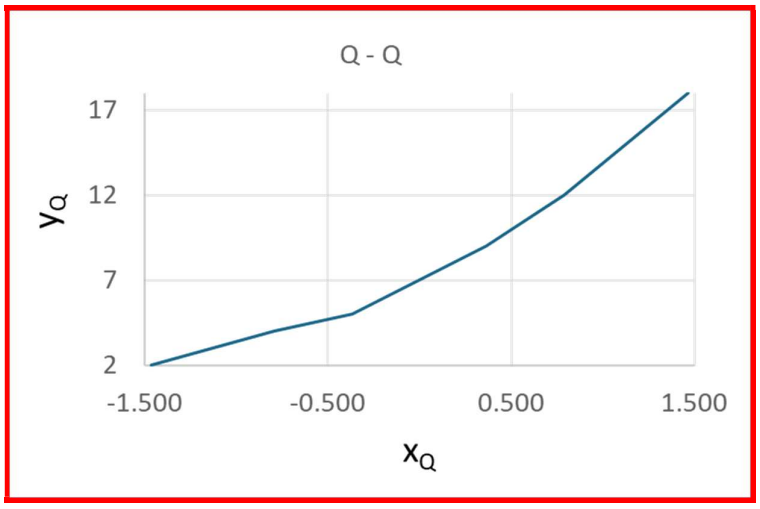
6 – وضع القيم المعيارية القيم الموحدة z–standard .

7 – إيجاد الاحتمال النظري F(x(i)) كما هو مبين فى جدول (14) :

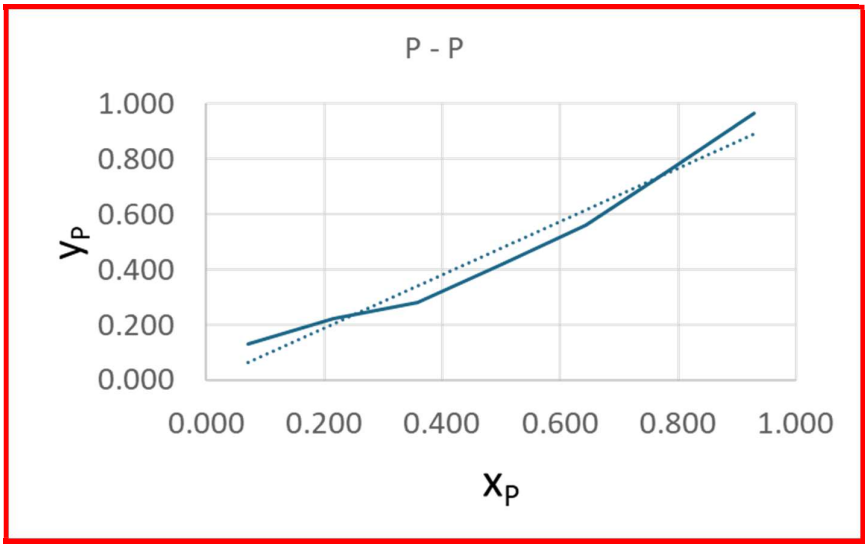
جدول (14)

39	A	B	C
40	y_Q		x_P
41	القيم الفعلية للبيانات	Rank الرتبة	الاحتمال التجريبي
42	xi	i	pi
43	**2**	1	0.071
44	**4**	2	0.214
45	**5**	3	0.357
46	**7**	4	0.500
47	**9**	5	0.643
48	**12**	6	0.786
49	**18**	7	0.929
50		RANK.AVG(A43,$A$43:$A$49,1)	(B43-0.5)/$B$53
51	μ	8.143	AVERAGE(A43:A49)
52	σ	5.460	STDEV.S(A43:A49)
53	n	7	COUNT($A$43:$A$49)

D	E	F
x_Q		y_P
القيمة المتوقعة من التوزيع الطبيعى	Z standard القيمة الموحدة	الاحتمال النظري
zi	z	F(x(i))
-1.465	-1.125	0.130
-0.792	-0.759	0.224
-0.366	-0.576	0.282
0.000	-0.209	0.417
0.366	0.157	0.562
0.792	0.706	0.760
1.465	1.805	0.964
NORM.S.INV(C43)	(A43-$B$51)/$B$52	NORM.S.DIST
		(E43,TRUE)



شكل (22)



شكل (23)

إضافة خط 45° (مهم جدًا)

ب – التحقق من **تساوي التباينات**

Homogeneity of Variances

اختبار ليفين Levene's Test

هو اختبار إحصائي يُستخدم للتحقق من تساوي التباينات Homogeneity of Variances بين مجموعتين أو أكثر ، وذلك قبل تطبيق اختبارات ANOVAأو اختبار t ، لاشتراط هذه الاختبارات تساوى تباينات العينات .

خطوات الاختبار :

(1) الفرض الأصلي H_0 :التباينات متساوية لجميع المجموعات .

(2) الفرض البديل H_A :التباينات غيرمتساوية لمجموعتين على الأقل .

(3) تحديد مستوى المعنوية : $\alpha = 5\%$

(4) العلاقة المستخدمة من ليفين :

$$F_{cal} = \frac{(N-k).SS_b}{(k-1).SS_w} = \frac{MS_b}{MS_w} \quad .., \qquad (115)$$

$N = n_1 + n_2 + \ ....$

$k: number\ of\ samples$

$SS_b\ : sum\ of\ squares\ of\ deviations\ between\ groups$

$MS_b\ : variance\ between\ groups$

$SS_w\ : sum\ of\ squares\ of\ deviations\ within\ \ groups$

$MS_w\ : variance\ within\ \ groups$

(5) نوجد القيمة الجدولية من جدول توزيع فيشر F_{tab}:

$$F_{tab} \ = \ F_{0.95,k-1,N-k}$$

اذا كانت $F_{cal} < F_{tab}$ ، يقبل الفرض الصفري بمعنى تساوى التباينات والعكس صحيح .

أو اذا كانت $P-value > 0.05$ يكون التباين متساوي والعكس صحيح.

مثـــــــال :

المطلوب اختبار تساوى تباينات العينتين المبينتين لدرجات الطلاب والطالبات في احدى المواد .

درجات طلبة (A)					درجات طالبات (B)				
10	11	10	11	10	5	15	25	35	45

الحـــــل:

تجرى الحسابات المبينة في الجدول التالى للتطبيق في العلاقة المستخدمة من ليفين :

	الدرجة	a القيمة المطلقة للانحراف عن متوسط كل مجموعة	b a-W1 a-W2	$b^2 = SS_w$	c W-W1 W-W2	$C^2 = SS_b$
طلبة A	10	0.4	-0.08	0.006	5.76	33.178
	11	0.6	0.12	0.014	5.76	33.178
	10	0.4	-0.08	0.006	5.76	33.178
	11	0.6	0.12	0.014	5.76	33.178
	10	0.4	-0.08	0.006	5.76	33.178
طالبات B	5	20	8	64	-5.76	33.178
	15	10	-2	4	-5.76	33.178
	25	0	-12	144	-5.76	33.178
	35	10	-2	4	-5.76	33.178
	45	20	8	64	-5.76	33.178
	sum	62.4		280		331.776
aver. A	10.4	W1 (متوسط فروقات المجموعة الأولى)	0.48			
aver. B	25	W2 (متوسط فروقات المجموعة الثانية)	12			
N	10	W (المتوسط الكلي للفروقات)	6.24			
k	2					
N-k	8					
k-1	1					

$$F_{cal} = \frac{(N-k).SS_b}{(k-1).SS_w} = \frac{8x331.778}{280} = 9.48$$

$$F_{tab} = F_{0.95,k-1,N-k} = 5.32 \quad , \quad F_{cal} > F_{tab}$$

ويمكن تنظيم الحسابات كما هو مبين في جدول ANOVA التالى :

Source of Variation	SS	df	MS= $\frac{SS}{df}$	F_{cal}	P−value	F_{tab}
Between Groups	331.8	2−1=1	331.8	9.478	0.015	5.318
Within Groups	280	10−2=8	35.01			
Total	611.8	9				

F_{cal} $(9.478) > F_{tab}$ Reject H_0 (يرفض الفرض الصفري بمعنى عدم تساوى التباينات)

كمايمكن استنتاج هذه النتيجة من قيمة

P – value $(0.015) < 0.05$ Reject H_0

أستاذ المساحة والجيوديسيا
كلية الهندسة / جامعة الأزهر
essamfawaz2001@gmail.com

تحليـــــل التبـــــاين

كماسبق بيانه هو طريقة إحصائية تستخدم لمقارنة متوسطي عينتين أو أكثر (Means of two or more samples) في متغير مستقل واحد أو أكثر (one or more independent variables)،

- اذا تواجد متغير مستقل واحد سمي بتحليل التباين الأحادي One Way ANOVA ،
- إذا تواجد متغيرين مستقلين سمى بالتحليل الثنائي Two Way ANOVA،
- إذا تواجد ثلاثة متغيرات مستقلة سمى بالتحليل الثلاثي Three Way ANOVA، وما زاد عن ذلك سمى تحليل التباين المتعدد Multiple analysis of variance.
- وقد كان من الممكن استخدام اختبار t او z لمقارنة كل عينتين على حدة، ولكن ذلك يتطلب وقتا طويلا لإجراء الاختبارات .

اختبارات الفروض Tests of hypotheses

أ – تحليل التباينات الأحادي: حيث يتواجد متغير مستقل واحد وعدد c من المجموعات

ANOVA with one independent variable and c Groups

الفرض الصفري والبديل :

- الفرض الصفري: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_c$
- الفرض البديل: $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \ldots \neq \mu_c$

ب – تحليل التباينات الثنائي: حيث يتواجد متغيرين مستقلين A,B وعدد c من المجموعات

ANOVA with 2 independent variables (A,B) and c Groups

الفرض الصفرى والبديل بالنسبة للمتغير المستقل A :

$$H_0: \mu_{A1} = \mu_{A2} = \cdots = \mu_{Ac}$$

$$H_1: \mu_{A1} \neq \mu_{A2} \neq \cdots \neq \mu_{Ac}$$

الفرض الصفري والبديل بالنسبة للمتغير المستقل B :

$H_0: \mu_{B1} = \mu_{B2} = \cdots = \mu_{Bc}$
$H_1: \mu_{B1} \neq \mu_{B2} \neq \cdots \neq \mu_{Bc}$

الفرض الصفري والبديل للتفاعل بين المتغيرين المستقلين B،A :

H_0: Interaction between A&B is present.

H_1: Interaction between A&B is absence.

ملاحظات:

1 – في حالة قبول الفرض الصفري فهذا يعنى ان المتوسطات متساوية .

2 – في حالة الرفض للفرض الصفري وزيادة عدد المجموعات المختبرة عن اثنتان فيجب اجراء اختبارات تسمى "اختبارات بعدية Post Hoc Tests" .

وقد أطلق عليها هذا المسمى لأنها لا تجرى إلا فى الحالات التاية :

1 – بعد إجراء اختبار تحليل التباينات NOVA .

2 – رفض الفرض الصفري .

3 – زيادة عدد المجموعات المختبرة عن اثنتان .

4 – إذا كان عدد المجموعات المختبرة قليل فيمكن اجراء اختبار ANOVA بين كل مجموعتين على حدة لمعرفة المجموعات المسببة لعدم التساوي للمتوسطات بين المجموعات والذي تسبب في رفض الفرض الصفري .

ولكن هذه العملية تعتبر شاقة في حالة وجود عدد كبير من المجموعات c حيث تكون عدد المقارنات n_p:

$$n_p = \frac{c(c-1)}{2} \quad .., \qquad (116)$$

1 – تحليل التباين في اتجاه واحد One– Way ANOVA

بفرض وجود متغير مستقل واحد، وعدد c من مجموعات الأرصاد (ثلاثة أو أكثر) ، وكل مجموعة تحتوي على عدد n_i من المفردات ، حيث تتبع هذه المجتمعات التوزيع الطبيعي وذات تباين متساوي ، والمطلوب إجراء اختبار تحليل التباينات لمعرفة ما اذا كان هناك فرق أو اختلاف جوهري بين متوسطات المجتمعات وذلك لدرجة معنوية a=.05 ، أي أن :

α=.05 , Number of groups = c ,

Size of the groups = $n_1, n_2, ..$,

Total number N = $n_1 + n_2 +$ ..

وتكون خطوات إجراء اختبار التباينات كما يلي:

1 – وضع الفرض الصفري والبديل كما يلي :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots \mu_c$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots \mu_c$$

بتوافر الاشتراطات الواجب توافرها لإجراء اختبار ANOVA يكون المقياس الإحصائي المستعمل :

F –test

2 – تعيين درجات الحرية : Degree of freedom

أ – درجة الحرية بين المجموعات Between Groups :

$$\boldsymbol{\nu_c = c - 1} \quad .., (117)$$

ب – *درجة الحرية* داخل المجموعات Within Groups:

$$\boldsymbol{\nu_w = N - c} \quad .., \quad (\boldsymbol{118a})$$

وفي حالة عدم تساوي مفردات المجموعات n_1 , n_2...

$$\boldsymbol{\nu_w = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots} \quad .., \quad (118b)$$

جـ – درجة الحرية الكلية : Total

$$\boldsymbol{\nu_t = \nu_c + \nu_w} = N - 1 \quad .., \quad (119)$$

3 – حساب مجموع مربعات الانحرافات :

أ – مجموع مربعات الانحرافات بين المجموعات ss_c :

$$ss_c = \left(\frac{(\sum c_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum c_2)^2}{n_2} + \ldots\right) - \frac{T^2}{N} \quad .., \ (120)$$

ب – مجموع مربعات الانحرافات داخل المجموعات ss_w:

$$ss_w = K - \left(\frac{(\sum c_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum c_2)^2}{n_2} + \ldots.\right) \quad .., \ (121)$$

جـ – مجموع مربعات الانحرافات الكلى: SS_t

$$ss_t = K - \frac{T^2}{N} \quad .., \ (122)$$

جدول (15): الحسابات اللازمة لاجراء تحليل التباين الاحادى

Group	c_1	c_2	... ...	
	a11 a21	.. ..		$K = \Sigma a_{ij}^2$ مجموع مربعات مفردات العينات
Σ	Σc_1	Σc_2	...	T=$\sum c_1 + \sum c_1 + ..$ مجموع مفردات العينات
Size	n_1	n_2	...	N=$n_1 + n_2 + ..$ مجموع أحجام العينات

4 – تعيين حد القبول والرفض : Critical value of F

$$F_{crit} = F_{a\ ,\ \nu_c\ ,\ \nu_w} \quad .., \ (123)$$

5 – جدول تحليل التباينات : ANOVA

Source Of variation	مجموع مربعات الانحرافات SS	درجة الحرية Degree of freedom ν	التباين Variance=SS/ν	F
Between Groups	SS_c	$\nu_c = c - 1$	$\sigma_c^2 = \frac{SS_c}{\nu_c}$	$F_{cal} = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_w^2}$
Within Groups	SS_w	$\nu_w = c(n-1)$: same size of samples $* \nu_w = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots$: different sizes.	$\sigma_w^2 = \frac{SS_w}{\nu_w}$	
Total	SS_t	$\nu_t = \nu_c + \nu_w = N - 1$: same sizes $\nu_t = \nu_c + * \nu_w$: different sizes		

6 – القـــــــرار : Decision

إذا كانت F_{cal} أقل من $F_{a,}\nu_{c,}\nu_{w}$ يقبل الفرض الصفري بمعنى تساوى المتوسطات ،والعكس صحيح.

حجم تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع :

ويتم ذلك بإحدى طريقتين:

الطريقة الأولى : وفيها يتم تعيين نسبة تباين درجات المتغير التابع بناءا على درجات المتغير المستقل من خلال حساب المعامل :

$$\gamma^2 = \frac{SS_c}{SS_t} \; x\, 100 \qquad .., \; (124)$$

الطريقة الثانية : وفيها يتم قياس حجم تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع باستخدام العلاقة التالية:

$$ES = 2\sqrt{\frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2 \geq}} \qquad .., \; (125)$$

يتم تفسير قيمة حجم التأثير ES تبعا للجدول التالي:

ES	التفسير Interpretation
$ES \geq 1.50$	Huge
$1.50 > ES \geq 1.10$	Very large
$1.10 > ES \geq 0.80$	Big
$0.80 > ES \geq 0.50$	Middle
$0.50 > ES \geq 0.20$	Small
$ES < 0.20$	Very small

مثـــــــال:

الجدول التالي يبين درجات 15 طالبا (الدرجة العظمى من 100) تم تقسيمهم إلى ثلاث مجموعات تبعا لطريقة تدريس مادة ما واختبارهم فيها ، والمطلوب اختبار فرض أن المتوسطات الثلاث متساوية وذلك لدرجة معنوية 0.05 .

Gr.1	Gr.2	Gr.3
77	82	74
75	80	72
81	85	78
79	86	75
83	89	78

الحـــــل:

$$c = 3 \ . \ n_1 = 5, n_2 = 5, n_3 = 5. \ N = 3x5 = 15$$

1 – وضع الفرض الصفري والبديل كما يلي :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$$

المقياس الإحصائي المستعمل : F– test

2 – تعيين درجات الحرية : Degree of freedom

أ – درجة الحرية بين المجموعات Between Groups :

$$\boldsymbol{\nu_c} = \mathbf{c} - 1 = 3 - 1 = 2$$

ب – *درجة الحرية* داخل المجموعات Within Groups:

$$\boldsymbol{\nu_w} = \mathbf{N} - \mathbf{c} = 15 - 3 = 12$$

جـ – درجة الحرية الكلية : Total

$$\boldsymbol{\nu_t} = \boldsymbol{\nu_c} + \boldsymbol{\nu_w} = N - 1 = 15 - 1 = 14$$

3 – حساب مجموع مربعات الانحرافات (كمافى جدول 14):

	c_1	c_2	c_3	
	77 75 81 79 83	82 80 85 86 89	74 72 78 75 78	Σa_{ij}^2 = 95364 مجموع مربعات مفردات العينات
sum	395	422	377	Sum = T=1194
size	5	5	5	N = 5 x 3 = 15

أ– مجموع مربعات الانحرافات بين المجموعات ss_c :

$$ss_c = \left(\frac{(\sum c_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum c_2)^2}{n_2} + \ldots\right) - \frac{(\sum c_1 + \sum c_2 + \cdots)^2}{N}$$

$$= \left(\frac{395^2}{5} + \frac{422^2}{5} + \frac{377^2}{5}\right) - \frac{1194^2}{15} = 205.2$$

ب – مجموع مربعات الانحرافات داخل المجموعات : SS_w

$$ss_w = K - \left(\frac{(\sum c_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum c_2)^2}{n_2} + \ldots\right)$$

$$= 95364 - \left(\frac{395^2}{5} + \frac{422^2}{5} + \frac{377^2}{5}\right) = 116.4$$

جـ – مجموع مربعات الانحرافات الكلى : SS_t

$$ss_t = K - \frac{T^2}{N} = 95364 - 95042.4 = 321.6$$

د – حساب القيمة الإحصائية F_{cal} :

$$F_{cal} = \frac{\nu_w \cdot SS_c}{\nu_c \cdot SS_w} = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_w^2} = 10.58$$

4 – تعيين حد القبول والرفض : Critical value of F

من الجداول الاحصائية F_{tab} : $F_{tab} = F_{a,\nu_c,\nu_w} = 3.89$

ويمكن توضيح ذلك في جدول انوفا كما يلى:

5 – جدول تحليل التباينات : ANOVA

Source Of variation	مجموع مربعات الانحرافات SS	درجة الحرية Degree of freedom ν	التباين Variance=SS/ν	F
Between Groups ss_c	205.2	$\nu_c = c - 1 = 3-1 = 2$	$\sigma_c^2 = \frac{SS_c}{\nu_c} = 102.6$	$F_{cal} = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_w^2} = 10.58$
Within Groups SS_w	116.4	$\nu_w = c(n-1) = 3(5-1) = 12$	$\sigma_w^2 = \frac{SS_w}{\nu_w} = 9.7$	$> F_{tab}$ (3.89)
Total ss_t	321.6	$\nu_t = \nu_c + \nu_w = N - 1 = 15-1 = 14$		Reject H_0

6 – القـــــــرار : Decision

F_{cal} اكبر من F_{tab} ، لذا يرفض الفرض الصفري بمعنى عدم تساوى المتوسطات.

السؤال الآن هو أي المجموعات الثلاث (طرق التدريس الثلاث) كانت السبب في وجود اختلافات إحصائية مما كانت السبب في رفض الفرض الصفري ، برفض الفرض الصفري في المثال المذكور تكون الفروقات بين متوسطات المجموعات (Between Groups) وداخل المجموعات (Within Groups)معنوية Significant أي أن لها دلالة إحصائية .

بوجود ثلاث طرق مختلفة للتدريس في المثال المذكور يكون السؤال الآن هو أي الطرق الثلاث كانت السبب في رفض الفرض الصفري.

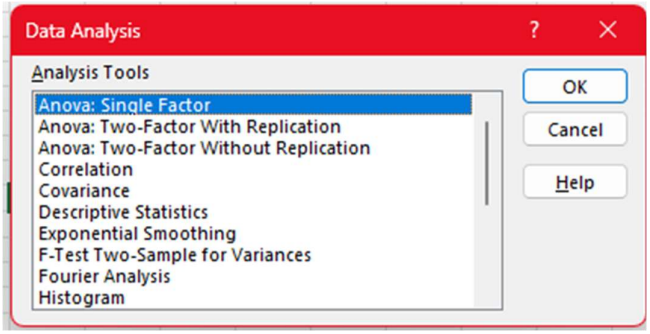
للإجابة على هذا السؤال يمكن إجراء نفس الاختبار السابق ANOVA بين كل مجموعتين على حدة (المجموعتين 1،2 ثم المجموعتين 2،3 وبعدها المجموعتين 1،3) وبذلك يمكن تحديد المجموعة المسببة لعدم تساوي المتوسطات .

وتكون عدد التجارب في هذه الحالة :

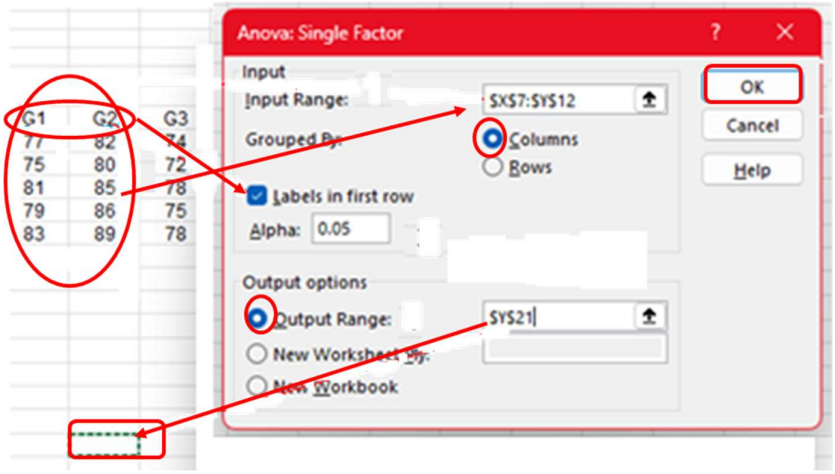
$$np = \frac{c(c-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3$$

باستخدام مايكروسوفت Excel نجري الاختبارات التالية بين المجموعات المختلفة كما يلي:

من واجهة البرنامج Excel يضغط على أيقونة Data ثم Data analysis



وبالضغط على ANOVA single Factor تظهر النافذة التالية حيث تتبع الخطوات المبينة فيما يلي :



تحليل التباين بين المجموعتين 1،2:

Groups	Count	Sum	Average	Variance		
G1	5	395	79	10		
G2	5	422	84.4	12.3		
ANOVA						
Source of Variation	SS	df	MS	F	P-value	F crit
Between Groups	72.9	1	72.9	6.54>Fcrit	0.03<.05	5.32
Within Groups	89.2	8	11.15			
Total	162.1	9				

القـــــرار :رفض الفرض الصفري بين المجموعتين 1،2 بمعنى عدم تساوى المتوسطات.

يجرى الاختبار مرة ثانية بين المجموعتين 1،3:

Groups	Count	Sum	Average	Variance		
G1	5	395	79	10		
G2	5	422	84.4	12.3		
ANOVA						
Source of Variation	SS	df	MS	F	P-value	F crit
Between Groups	72.9	1	72.9	6.54>Fcrit	0.03<.05	5.32
Within Groups	89.2	8	11.15			
Total	162.1	9				

القرار : قبول الفرض الصفري بين المجموعتين 1،3 بمعنى تساوى المتوسطات.

الاختبار مرة ثالثة بين المجموعتين 2،3:

Groups	Count	Sum	Average	Variance
Column 2	5	422	84.4	12.3
Column 3	5	377	75.4	6.8

Source of Variation	SS	df	MS	F	P-value	F crit
Between Groups	202.5	1	202.5	21.20>Fcrit	0.002<.05	5.32
Within Groups	76.4	8	9.55			
Total	278.9	9				

القـــــرار :رفض الفرض الصفري بين المجموعتين 2،3 بمعنى عدم تساوى المتوسطات.

من الواضح الآن أنه توجد دلالات إحصائية (تأثير) بين المجموعتين الثانية والثالثة وبين المجموعتين الأولى والثانية، بينما التأثير منعدم بين المجموعتين الأولى والثالثة.

أستاذ المساحة والجيوديسيا
كلية الهندسة / جامعة الأزهر
essamfawaz2001@gmail.com

يلاحظ أن عمليات المقارنة هذه سوف تكون طويلة وشاقة وخاصة إذا كان عدد المجموعات كبير، لذا تستخدم اختبارات تعرف الاختبارات البعدية.

الاختبارات البعدية Post Hoc Tests

وفيها تجرى مقارنات بين المجموعات المختلفة بغرض معرفة المجموعات المسببة لتواجد الفروقات ذات الدلالة الإحصائية ولا تجرى هذه الاختبارات الابعد اجراء اختبار Anova على ثلاث عينات أو أكثر ورفض الفرض الصفرى . نذكر من هذه الاختبارات:

1 – طريقة أقل فروقات معنوية بين المجموعات Least Significance Difference (LSD)

أ – في حالة تساوي حجم عينات كل مجموعة

ب – في حالة عدم تساوي حجم المجموعات

2 – اختبار شيفى Scheffe

3 – اختبار توكى Tukey

أ – فى حالة تساوى مفردات المجموعات .

ب – في حالة عدم تساوى مفردات المجموعات .

1 – طريقة أقل فروقات معنوية بين المجموعات

Least Significance Difference (LSD)

أ – في حالة تساوي حجم عينات كل مجموعة تستعمل العلاقة التالية لإيجاد المعامل LSD :

$$LSD = t_{\alpha/2,\nu_w} \cdot \sqrt{\frac{2\sigma_w^2}{n}} \quad .., \qquad (126)$$

حيث تمثل: LSD أقل فرق معنوي :min. significant difference،

$t_{\alpha/2}$: قيمة t الجدولية عند درجة معنويه $\alpha/2$ ، ودرجة حرية υ_w داخل المجموعات (within groups).

σ_w^2 : تباين الخطأ داخل المجموعات (within groups). يتم الحصول عليه من جدول تحليل التباينات ANOVA .

n :المجموعة مفردات عدد size of each group

عدد المقارنات number of paired differencesالتي تجرى بين المتوسطات يمكن تعيينها من العلاقة (116) :

$$n_p = \frac{c(c-1)}{2}$$

ويتم مقارنة الفروقات بين المجموعات المختلفة وبين المعامل LSD ، فإذا كانت أكبر من LSD دل ذلك على أن هذه الفروقات ذات دلالة إحصائية والعكس صحيح .

بتطبيق ذلك على المثال المذكور ومن بيانات جدول ANOVA الذي حصلنا عليه:

variance	مجموع مربعات الانحرافات SS	درجة الحرية Degree of freedom ν	التباين MS SS/ν	F
Between Groups	205.2	$c-1=3-1=2$	102.6	$\frac{102.6}{9.7}=10.58$ $>F_{crit.}(3.89)$
Within Groups	116.4	$N\text{-}c=15-3=12$	9.7	
Total	321.6	$N-1=14$	Decision	**Reject H_0**

$t_{\alpha/2,v_w} = t_{0.025,12} = 2.18$

$$LSD = t_{\alpha/2,v_w} \cdot \sqrt{\frac{2\sigma_w^2}{n}} = 2.18 \text{ x } \sqrt{\frac{2x9.7}{5}} = 4.294$$

$$n_p = \frac{c(c-1)}{2} = \frac{3x2}{2} = 3$$

في هذا المثال ثلاث وهي المقارنات بين القيم المطلقة للفروقات بين متوسطات n_pعدد المقارنات المجموعات الأولى والثانية وبين الأولى والثالثة وبين الثانية والثالثة كما هو موضح بالجدول التالي:

Least Significance Difference (LSD)=4.294

3(mean 75.4)	2(mean 84.4)	1(mean 79)	متوسطات المجموعات
3.6 < LSD NS	5.4* > LSD SIG		1(mean 79)
9.0* > LSD SIG			2(mean 84.4)
			3(mean 75.4)

* الفارق بين المجموعتين معنوي (SIG.أي ذو دلالة إحصائية)

(SIG: significant, NS: not significant)

يلاحظ أن الفارق بين متوسطي المجموعتين الأولى والثالثة أقل من قيمة LSD(4.294) ، بينما الفارق بين المجموعتين الأولى والثانية وكذلك بين المجموعتين الثانية والثالثة أكبر من LSD (فروقات معنوية) ، بمعنى وجود فروقات ذات دلالة إحصائية بين المجموعتين الأولى والثانية لصالح المجموعة الثانية وبين المجموعتين الثانية والثالثة لصالح المجموعة الثانية ذات المتوسط الأكبر.

ب – في حالة عدم تساوي حجم المجموعات تستعمل العلاقة التالية لإيجاد المعامل LSD بين كل مجموعتين i ، j على حدة :

$$LSD = t_{\alpha/2,v_w} \cdot \sqrt{\sigma_w^2 \cdot \left[\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right]} \quad .., \quad (127)$$

ν_w : درجة الحرية داخل المجموعات

σ_w^2 : تباين الخطأ داخل المجموعات ويتم الحصول عليه من جدول تحليل التباينات،

α : درجةالمعنوية .

في حالة زيادة الفرق بين متوسطي المجموعتين i , j عن هذا المعامل تعتبر الفروقات بينهما معنوية أو ذات دلالة إحصائية لصالح المجموعة ذات المتوسط الأكبر.

2 – اختبار شيفي Scheffe

يستخدم هذا الاختبار في حالة عدم تساوي حجم المجموعات ، فبفرض تواجد مجموعتين c =2 حجمهما n_1 , n_2 يتم المقارنة بينهما من خلال تعيين قيمة المعامل ST كما يلي:

$$ST = \sqrt{\frac{\sigma_w^2 \,.\, (c-1)(n_1+n_2).\ F_{\alpha,\upsilon_c,\upsilon_w}}{(n_1)(n_2)}} \ .., \quad (128)$$

$\boldsymbol{\sigma_w^2}$: تباين الخطأ داخل المجموعات (within groups) ،

$\boldsymbol{\alpha}$: ،درجة المعنوية ، $\boldsymbol{\upsilon_w}$: درجة الحرية داخل المجموعات ،

$\boldsymbol{\upsilon_c}$: درجة الحرية بين المجموعات ، $\boldsymbol{F_{\alpha,\upsilon_c,\upsilon_w}}$: قيمة F الجدولية .

إذا زاد الفرق بين متوسطي المجموعتين عن القيمة ST دل ذلك على أن الفرق بينهما ذات دلالة إحصائية .

مثـــــال:

المطلوب إجراء اختبار Scheffe على البيانات التالية حيث عدد مفردات مجموعات المقارنة الثلاث ومتوسطاتها الثلاث كما هو مبين :

c = 3 , n1= 7 , n2= 6 , n3= 9 , α=.05

$\bar{x}_1$=50.86 , $\bar{x}_2$=58.76 , $\bar{x}_3$=80.81

والبيانات المأخوذة من جدول تحليل التباينات كما يلي:

درجات الحرية بين المجموعات Between Groups(υ_c) = 2

وداخل المجموعات within Groups (υ_w) =18

تباين الخطأ التجريبي 3 = MSE (σ_w^2)

الحـــــل:

من الجداول الإحصائية: $F_{\alpha,\upsilon_c,\upsilon_w} = F_{.05,2,18} = 3.55$

بتطبيق اختبار Scheffe بين المجموعتين الأولى والثانية:

$$ST_{1,2} = \sqrt{\frac{\sigma_w^2\,(c-1)(n_1+n_2).\ F_{\alpha,\upsilon_c,\upsilon_w}}{(n_1)(n_2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{3\,(3-1)(7+6).\ 3.55}{7x6}} = 2.57$$

$$\Delta\bar{x} = 58.76 - 50.86 = 7.90 > ST \qquad \therefore \text{sig. difference.}$$

بنفس الطريقة يمكن تعيين قيمة اختبار Scheffe بين المجموعتين الأولى والثالثة وبين المجموعتين الثانية والثالثة كما هو مبين:

$$ST_{1,3} = \sqrt{\frac{\sigma_w^2\,(c-1)(n_1+n_3).\ F_{\alpha,\upsilon_c,\upsilon_w}}{(n_1)(n_3)}} = \sqrt{\frac{3\,(3-1)(7+9).\ 3.55}{7x9}} = 2.33$$

$$ST_{2,3} = \sqrt{\frac{\sigma_w^2\,(c-1)(n_2+n_3).\ F_{\alpha,\upsilon_c,\upsilon_w}}{(n_2)(n_3)}}$$

$$= \sqrt{\frac{3\,(3-1)(6+9).\ 3.55}{6x9}} = 2.43$$

80.81 (3)	58.76 (2)	50.86 (1)	mean
$29.95>ST_{1,3}$ SIG.	$7.90>ST_{1,2}$ SIG.		50.86 (1)
$22.05>ST_{2,3}$ SIG.			58.76 (2)
			80.81 (3)

وهذا دليل على أن الفروقات بين المتوسطات للمجموعات الثلاث ذات دلالة إحصائية.

3 – اختبار توكى Tukey

أ – فى حالة تساوى مفردات المجموعات .

قيمة اختبار توكي TT يمكن تعيينها من العلاقة:

$$TT = Q_{\alpha,c,N-c}\sqrt{\frac{\sigma_w^2}{n}} \quad ,,. \quad (129)$$

حيث $Q_{\alpha,c,N-c}$: قيمة جدولية Tukey Test Critical values يتم الحصول عليها بدرجة معنوية α ، ودرجة حرية في البسط c (عدد المجموعات) ، ودرجة حرية في المقام (N – c) (عدد الأرصاد الكلية – عدد المجموعات)

$\boldsymbol{\sigma_w^2}$: تباين الخطأ التجريبي (within groups) ،

n : حجم أي مجموعة من المجموعات.

Tukey Test Critical Values Table

جداول توكي الإحصائية لدرجات المعنوية المختلفة 0.01 ، 0.05، 0.10 ويمكن تعيين القيمة الجدولية لتوكي لدرجة معنوية α بمعلومية درجة الحرية في البسط c (عدد المجموعات) ، ودرجة الحرية في المقام (N – c).

α = 0.05

N - c \ c (Number of Groups)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83	59.56
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57	16.77
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.15	10.35	10.53	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	6.00	6.05	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

$Q_{\alpha,c,N-c}$ =3.61

n=size of each group=7, c = 3, N=7x3=21

$Q_{\alpha,c,N-c}$= $Q_{.05,3,(21-3)}$ = 3.61 , σ_w^2=3

قيمة اختبار توكي TT:

$$TT = Q_{\alpha,c,N-c}\sqrt{\frac{\sigma_w^2}{n}} = 3.61\sqrt{\frac{3}{7}} = 3.61\sqrt{\frac{3}{7}} = 2.36$$

وهي قيمة حرجة لمقارنة الفروقات المطلقة بين متوسطات المجموعات والموضحة بالجدول التالي كمثال .

(SIG:معنوي Significant ، NS: non−significantغير معنوي)

متوسطات المجموعات	1(7.14)	2(6.57)	3(3.71)
1(7.14)		0.57<TT NS	3.43 > TT SIG
2(6.57)			2.86 > TT SIG
3(3.71)			

يلاحظ أن القيمة المطلقة للفارق بين متوسطي المجموعتين الأولى والثانية أقل من قيمة Tukey(2.36) ، بينما الفروقات الأخرى أكبر منها بمعنى وجود فروقات ذات دلالة إحصائية بين المجموعتين الأولى والثالثة وكذلك الثانية والثالثة ، بينما لا توجد أي فروقات ذات دلالة إحصائية بين المجموعتين الأولى والثانية.

ب – في حالة عدم تساوى مفردات المجموعات

نوجد الوسط التوافقي لأحجام المجموعات:

$$n_k = \frac{c}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots \frac{1}{n_c}}$$

n_k : الوسط التوافقي ، $n_1 , n_2 , .., n_c$: عدد مفردات المجموعات.

وتكون قيمة اختبار توكي الاحصائية TT:

$$TT = Q_{\alpha,c,N-c} \sqrt{\frac{\sigma_w^2}{n_k}} \quad .., \qquad (130)$$

$Q_{\alpha,c,N-c}$: قيمة جدولية Tukey Test Critical values Table يتم الحصول عليها بدرجة معنوية α ودرجة حرية في البسط c (عدد المجموعات) ودرجة حرية في المقام (N–c)

، σ_w^2 : تباين الخطأ التجريبي (within groups) .

مثـــــال:

إذا علم أن تباين الخطأ التجريبي σ_w^2 =19.53 داخل ثلاث مجموعات (c=3) عدد مفرداتها 7 ، 6 ، 9 (N=22) ، يكون الوسط التوافقي:

$$n_k = \frac{g}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots \frac{1}{n_c}} = 7.14$$

والقيمة الجدولية لاختبار توكي:

$$Q_{\alpha,c,N-c} = Q_{.05,3,19} = 3.59 \ \text{(from tukey table)}$$

وبذلك تكون قيمة اختبار توكي الاحصائية:

$$TT = Q_{\alpha,c,N-c} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_w^2}{n_k}} = 3.59x \sqrt{\frac{19.53}{7.14}} = 5.94$$

فإذا كانت القيمة المطلقة للفارق بين متوسطي أي مجموعتين أكبر من القيمة TT ، كان الفارق بينهما ذات دلالة إحصائية(فرق معنوى) والعكس صحيح.

تحليل التباين الثنائي

ANalysis Of Variance 2 way ANOVA

طريقة إحصائية لتحليل ودراسة تأثير عاملين (متغيرين مستقلين) أو أكثر على متغير كمي (المتغير التابع). لإجراء هذا الاختبار لابد من توافر الشروط السابق ذكرها فى تحليل التباين في اتجاه واحد .

المقياس الإحصائي المستعمل : F -test

بفرض أن الصفة قيد الدراسة (المتغير الكمي - المتغير التابع) تقع تحت تأثير عاملين (متغيرين) مستقلين ، مثال ذلك قياس قيمة ضغط الدم (الصفة قيد الدراسة – المتغير التابع) والواقعة تحت تأثير عاملين مستقليين وهما تأثير نوع العلاج (عامل مستقل أول Factor I) وعمر المريض (عامل مستقل ثاني Factor II) ، والمطلوب معرفة تأثير هذين المتغيرين المستقلين على ضغط الدم .

تحليل التباين الثنائي قد يكون فيه تكرار للقياسات داخل كل مجموعة

with replication أو لا يكون هناك تكرار Without replication .

الفرق باختصار:

With replication: تكون به بيانات مكررة فيكون الناتج تحليل أقوى ودراسة التفاعل بين المؤثرين .

Without replication : لا يوجد تكرار للبيانات فيكون التحليل أضعف وكذلك عدم وضوح التفاعل بين المؤثرين .

تحليل ثنائي بدون تكرار للقياسات Without replication .

وتكون خطوات إجراء اختبار التباينات كما يلي:

1 –وضع الفرض الصفرى والبديل :

الفرض الصفرى والبديل بالنسبة للمتغير المستقل I : الأثر الاساسى له على المتغير التابع.

H_0: تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقل I

H_A :عدم تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقل I

الفرض الصفرى والبديل بالنسبة للمتغير المستقل II: الأثر الاساسى له على المتغير التابع.

H_0 : تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقل II

H_A : عدم تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقل II

الفرض الصفرى والبديل للتفاعل بين المتغيرين المستقلين I,II : أثر تفاعل المتغيرين المستقلين على المتغير التابع.

H_0 : عدم وجود تفاعل بين المتغيرين I , II .

H_A : وجود تفاعل بين المتغيرين I , II .

2 – تعيين درجات الحرية : Degree of freedom

أ – درجة الحرية بين الاعمدة Between Columns :

$$\boldsymbol{\nu_c = c - 1} \quad .., \qquad (131a)$$

ب – *درجة الحرية بين الصفوف* :Between Rows

$$\nu_r = r - 1 \quad .., \quad (131b)$$

جـ – درجة الحرية الكلية : Total

$$\boldsymbol{\nu_t = N - 1} \quad .., \quad (131c)$$

د – درجة الحرية للبواقى : For the rest

$$\nu_{er} = \nu_t - \nu_c - \nu_r = \nu_c . \nu_r \quad .., \qquad (131d)$$

3 – حساب مجموع مربعات الانحرافات :

		المتغير المستقل I						
		c_1	c_2	c_3	..	c_c	∑	
المتغير المستقل II	r_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	..	a_{1c}	$\sum r_1$	
	r_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	..	a_{2c}	$\sum r_2$	
	r_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	..	a_{3c}	$\sum r_3$	
	...	...	...	...	...	...	...	
	r_r	a_{r1}	a_{r2}	a_{r3}	...	a_{rc}	$\sum r_r$	
	∑	$\sum c_1$	$\sum c_2$	$\sum c_3$		$\sum c_c$	$T=\sum a_{ij}$	$K=\sum(a_{ij})^2$
	n	n_1	n_2	n_3	...		$N=\sum n_i$	

أ – مجموع مربعات الانحرافات بين الاعمدة SS_c :

$$SS_c = \frac{(\sum c_1)^2}{n1} + \frac{(\sum c_2)^2}{n2} + \ .... \ - \frac{K}{N} \quad .., \ (132)$$

ب – مجموع مربعات الانحرافات بين الصفوف SS_r:

$$SS_r = \frac{(\sum r_1)^2}{c} + \frac{(\sum r_2)^2}{c} + \frac{(\sum r_3)^2}{c} + \ldots\ldots - \frac{K}{N} = \quad .., (133)$$

جـ – مجموع مربعات الانحرافات الكلى: SS_t

$$SS_t = K - \frac{T^2}{N} \quad .., (134)$$

د – مجموع مربعات الانحرافات للاخطاء: SS_{er}

$$SS_{er} = SS_t - SS_c - SS_r \quad .., (135)$$

Source Of variation	مجموع مربعات الانحرافات SS	درجة الحرية Degree of freedom N(df)	التباين Variance=SS/ν MS(σ^2)	F
Between Columns	SS_c	$\nu_c = c - 1$	$\sigma_c^2 = \frac{SS_c}{\nu_c}$	$F_c = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_{er}^2}$
Between rows	SS_r	$\nu_r = r - 1$	$\sigma_r^2 = \frac{SS_r}{\nu_r}$	$F_r = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_{er}^2}$
Errors	SS_{er}	$\nu_{er} = \nu_t - \nu_c - \nu_r = \nu_c \, x \, \nu_r$	$\sigma_{er}^2 = \frac{SS_{er}}{\nu_{er}}$	
Total	SS_t	ν_t = N - 1		

مثـــــال: بدون تكرار Without Replication

الجدول التالي يبين قياسات ضغط الدم (متغير تابع) تحت تأثير عاملين مستقلين وهما نوع الدواء medicine (A , B , C) وعمر المريض Age (I , II , III) ، المطلوب معرفة ما اذا كان اختلاف جوهرى لنوع الدواء أو بالنسبة لعمر المريض على الضغط المقاس وذلك لدرجة معنوية 0.05 .

		medicine		
		A	B	C
Age	I	115	130	135
	II	120	130	140
	III	110	120	130

الحـــــل:

1 – الفرض الصفرى والبديل :

الفرض الصفري : لا يوجد اختلاف جوهري بالنسبة لنوع العلاج وكذلك

لا يوجد اختلاف جوهري بالنسبة لعمر المريض .

الفرض البديل : هناك اختلاف جوهري بالنسبة لنوع العلاج

أو هناك اختلاف جوهري بالنسبة لعمر المريض .

2 – درجة معنوية : 0.05 .

3 – المقياس الإحصائي المستخدم : توزيع فيشر F

4 – تعيين درجات الحرية : Degree of freedom

أ – درجة الحرية بين الاعمدة Between Columns :

$$\nu_c = c - 1 = 3 - 1 = 2$$

ب – *درجة الحرية بين الصفوف* Between Rows:

$$\nu_r = \mathrm{r} - 1 = 3 - 1 = 2$$

جـ – درجة الحرية الكلية : Total

$$\nu_t = \mathrm{N} - 1 = 9 - 1 = 8$$

د – درجة الحرية للبواقى : For the rest

$$\nu_r = 2 \; x \; 2 = 4 \nu_{er} = \nu_c \; x$$

		medicine					
		A	B	C		∑	average
age	I	115	130	135		380	126.67
	II	120	130	140		390	130.00
	III	110	120	130		360	120.00
	∑	345	380	405	$T = \sum a_{ij}$	1130	
	average	115.00	126.67	135.00	$K = \sum(a_{ij})^2$	142650.000	
	n	3	3	3	N=	9	

3 – حساب مجموع مربعات الانحرافات :

أ – مجموع مربعات الانحرافات بين الاعمدة SS_c :

$$SS_c = \frac{(\sum c_1)^2}{n1} + \frac{(\sum c_2)^2}{n2} + \ldots . - \frac{K}{N}$$
$$= \frac{(345)^2}{3} + \frac{(380)^2}{3} + \frac{(405)^2}{3} - \frac{142650}{9} = 605.56$$

ب – مجموع مربعات الانحرافات بين الصفوف SS_r:

$$SS_r = \frac{(\sum r_1)^2}{c} + \frac{(\sum r_2)^2}{c} + \frac{(\sum r_3)^2}{c} + \ldots \ldots . - \frac{K}{N}$$
$$= \frac{(380)^2}{3} + \frac{(390)^2}{3} + \frac{(360)^2}{3} - \frac{142650}{9} = 155.56$$

جـ – مجموع مربعات الانحرافات الكلى: SS_t

$$SS_t = K - \frac{T^2}{N} = 142650 - \frac{1130^2}{9} = 772.22$$

د. – مجموع مربعات الانحرافات للاخطاء: SS_{er}

$$SS_{er} = SS_t - SS_c - SS_r = 772.22 - 605.56 - 155.56 = 11.11$$

ANOVA

	SS	df($\boldsymbol{\nu}$)	MS(σ^2)	F_{cal}	p- value	F_{tab}	
ss_c	605.56	3-1=2	302.78	109.00	0.0003	6.94	Rej. H_0
ss_r	155.56	3-1=2	77.78	28.00	0.0044	6.94	Rej. H_0
ss_{er}	11.11	2x2=4	2.78				
ss_t	772.22	9-1=8	96.53				

لمعرفة أي المؤثرات كانت السبب في رفض الفرض الصفري تستعمل احدى طرق الاختبارات البعدية ولتكن طريقة أقل فروقات معنوية بين المجموعات.

$$LSD = t_{\alpha/2,\boldsymbol{\nu_{er}}} \cdot \sqrt{\frac{2\sigma_{er}^2}{n}} \quad .., \qquad (126)$$

حيث تمثلLSD: أقل فرق معنوي Least Significant Difference ،

$t_{\alpha/2,\boldsymbol{\nu_{er}}}$: قيمة t الجدولية عند درجة معنويه $\alpha/2$ ، ودرجة حرية ν_{er}

σ_{er}^2: تباين الخطأ ويتم الحصول عليه من جدول تحليل التباينات ANOVA .

n : عدد مستويات المتغير المستقل (مثال ذلك لنوع العلاج =3 ، وبالنسبة للعمر = 3) .

	Age	medicine
σ_{er}^2	2.78	2.78
$t_{\alpha/2,\boldsymbol{\nu_{er}}} = t_{0.025\,,4}$	2.78	2.78
n	3	3
$LSD = t_{\alpha/2,\boldsymbol{\nu_{er}}} \cdot \sqrt{\frac{2\sigma_{er}^2}{n}}$	3.78	3.78

	Abs. dif. Of avg.			LSD	decision
Age	I – II	3.33	<	3.78	Acc. H_0
	II - III	10.00	>	3.78	Rej. H_0
	I - III	6.67	>	3.78	Rej. H_0

	medicine		
Abs. diff. of avg.	A-B	B-C	C-A
	11.67	8.33	20.00
	>	>	>
LSD	3.78	3.78	3.78
decision	Rej. H_0	Rej. H_0	Rej. H_0

من الواضح أن هناك فروق ذات دلالة إحصائية بين المستويات المختلفة للمتغيرات المستقلة ، فيما عدا بين مستويي العمر II , I .

باستعمال برنامج الاكسيل يمكن الحصول على نفس النتائج.

Anova: Two-Factor Without Replication

SUMMARY	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*
I	3	380	126.67	108.33
II	3	390	130	100
III	3	360	120	100
A	3	345	115	25
B	3	380	126.67	33.33
C	3	405	135	25

ANOVA

Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*	
Rows	155.56	2	77.78	28	0.004	6.94	Reject H_0
Columns	605.56	2	302.78	109	0.0003	6.94	Reject H_0
Error	11.11	4	2.78				
Total	772.22	8					

تحليل التباين الثنائي مع تكرار الارصاد

ANalysis Of Variance 2-way ANOVA With Replication

وفيه تكون به بيانات مكررة فيكون الناتج تحليل أقوى ودراسة التفاعل بين المؤثرين .

مثـــــــال1 : (مع التكرار) 2-way with Replication

تم إجراء تجربة لدراسة تأثير طريقة التدريس (A2 , A1) ونوع الاختبار (B2 , B1) على الدرجات التي يحصل عليها الطلبة فكانت :

	B1	B2
A1	8	12
	10	14
A2	16	20
	18	22

المطلوب:

1. حساب مجموع مربعات الانحراف SSA، SSB، SSAB، SSE، SST
2. تكوين جدول ANOVA
3. استنتاج ماذا كان هناك تفاعل بين العاملين A , B

الحـــــــل:

1- وضع الفرض الصفرى والبديل :

الفرض الصفرى والبديل بالنسبة للمتغير المستقل A : الأثر الاساسى له على المتغير التابع.

H_0 : تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقلA

H_A : عدم تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقل A

الفرض الصفرى والبديل بالنسبة للمتغير المستقل B: الأثر الاساسى له على المتغير التابع.

H_0 : تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقلB

H_A : عدم تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقل B

الفرض الصفرى والبديل للتفاعل بين المتغيرين المستقلين B , A: أثر تفاعل المتغيرين المستقلين على المتغير التابع.

H_0 : عدم وجود تفاعل بين المتغيرين A , B .

H_A : وجود تفاعل بين المتغيرين A , B .

2- درجة معنوية : 0.05 .

3- المقياس الإحصائي المستخدم : توزيع فيشر F

الحسابات : N:عدد الأرصاد ، n : عدد التكرارات ،

a : عدد مستويات A ، b : عدد مستويات B

1 - حساب المتوسطات :

	B1	B2
A1	8	12
	10	14
A2	16	20
	18	22

أ - متوسطات A:

- $A1 = \frac{8+10+12+14}{4} = 11$, $A2 = \frac{16+18+20+22}{4} = 19$

ب - متوسطات B:

- $B1 = \frac{8+10+16+18}{4} = 13$, $B2 = \frac{12+14+20+22}{4} = 17$

جـ - متوسطات الـ Cells:

$$A1B1 = \frac{8+10}{2} = 9\,, A1B2 = \frac{12+14}{2} = 13\,,$$
$$A2B1 = \frac{16+18}{2} = 17\,, A2B2 = \frac{20+22}{2} = 21$$

د – المتوسط العام:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{8+10+16+18+12+14+20+22}{8} = 15$$

n : عدد التكرارات ، a : عدد مستويات A ، b : عدد مستويات B

2) SST (مجموع مربعات الانحرافات الكلى):

$$SST = \sum (x_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 \quad .., \qquad (136)$$

$$= \sum x_{ij}^2 - \frac{(\sum x)2}{N} = \sum (x_{ij} - 15)^2 = 168$$

3) SSA (مجموع مربعات الانحرافات للمتغير المستقل الاول):

$$SSA = n.b \sum (\bar{A} - \bar{\bar{X}})^2 \quad .., \quad (137)$$

n. b = 4

$$\therefore SSA = 4[(11-15)^2 + (19-15)^2] = 4(16+16) = 128$$

4) SSB (مجموع مربعات الانحرافات للمتغير المستقل الثانى):

$$SSB = na \sum (\bar{B} - \bar{\bar{X}})^2 \quad .., \quad (138)$$

n. a = 4

$$\therefore SSB = 4[(13-15)^2 + (17-15)^2] = 4(4+4) = 32$$

5) SSAB (مجموع مربعات الانحرافات للمتغيرين المستقلين مجتمعين):

$$SSAB = n \sum (X_{ij} - X_{i.} - X_{.j} + \bar{\bar{X}})^2 \quad .., \quad (139)$$

$$\therefore \text{SSAB} = 2x[(9-11-13+15)^2 + (13-11-17+15)^2 + (17-19-13+15)^2 + (21-19-17+15)^2] = 0$$

6) SSE (مجموع مربعات الانحرافات للاخطاء)

$$SSE = SST - SSA - SSB - SSAB \quad .., \qquad (140)$$

$\therefore SSE = 168 - 128 - 32 = 8$

7) درجات الحرية:

$dfA = a - 1 \quad .., \quad (141a)$

$= 2 - 1 = 1$

$dfB = b - 1 \quad .., \quad (141b)$

$= 2 - 1 = 1$

$dfAB = (a - 1).(b - 1) \quad .., \quad (141c)$

$= (2 - 1) \times (2 - 1) = 1$

$dfE = a.b.(n - 1) \quad .., \quad (141d)$

$= 2 \times 2 \times (2-1) = 4$

$dfT = N - 1 \quad .., \quad (141e)$

$= 8 - 1 = 7$

ANOVA							
Source of Variation	SS	df	MS	F	P-value	F crit	
Sample (A)	128	1	128	64	0.001	7.709	Reject H_0
Columns (B)	32	1	32	16	0.016	7.709	Reject H_0
Interaction (AB)	0	1	0	0	1	7.709	No Inter.
Within (Error)	8	4	2				
Total	168	7					

مثـــــال2 : (مع التكرار) 2-way with Replication

تم إجراء تجربة لدراسة تأثيرطريقة التدريس (A1 , A2 , A3) ونوع الاختبار (B1 , B2 , B3) على الدرجات التي يحصل عليها الطلبة فكانت كما هو مبين بالجدول المرفق.

	B1	B2	B3
A1	10	14	18
	12	16	20
A2	12	16	20
	14	18	22
A3	14	18	22
	16	20	24

المطلوب:

1. حساب SSA، SSB، SSAB، SSE، SST
2. تكوين جدول ANOVA
3. استنتاج هل يوجد تفاعل بين العاملين A , B

الحـــــل:

1 – وضع الفرض الصفري والبديل :

الفرض الصفرى والبديل بالنسبة للمتغير المستقلA : الأثر الاساسى له على المتغير التابع.

H_0 : تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقلA

H_A : عدم تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقل A

الفرض الصفري والبديل بالنسبة للمتغير المستقل B: الأثر الاساسى له على المتغير التابع.

H_0 : تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقلB

H_A : عدم تساوى متوسطات المتغير التابع لكل فئة من فئات المتغير المستقل B

الفرض الصفري والبديل للتفاعل بين المتغيرين المستقلين A , B : أثر تفاعل المتغيرين المستقلين على المتغير التابع.

H_0 : عدم وجود تفاعل بين المتغيرين .

H_A : وجود تفاعل بين المتغيرين .

N :عدد الأرصاد (18) ، n : عدد التكرارات (3) ،

a : عدد مستويات A (3) ، b : عدد مستويات B (3) .

1 – حساب المتوسطات :

	B1	B2	B3
A1	10	14	18
	12	16	20
A2	12	16	20
	14	18	22
A3	14	18	22
	16	20	24

أ – متوسطات A :

$A1 = \frac{10+14+18+12+16+}{6}$ 15 , $A2 = \frac{12+16+20+14+18+22}{6} = 17$, A3=19

ب – متوسطات B : $B1 = 13$, $B2 = 17$, $B3 = 21$

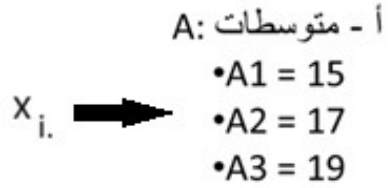
جـ – متوسطات الخلايا Cells :

Celles	B1	B2	B3
A1	$\frac{10+12}{2} = 11$	$\frac{14+16}{2} = 15$	$\frac{18+20}{2} = 19$
A2	$\frac{12+14}{2} = 13$	$\frac{16+18}{2} = 17$	21
A3	15	19	23

د – المتوسط العام: $\bar{\bar{X}} = 17$

2) $SST = \sum (x_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 = \sum (x_{ij} - 17)^2 = 258$

3) SSA :



$SSA = n.b \sum (\bar{A} - \bar{\bar{X}})^2$, n. b = 2x3=6

$SSA = 6[(15-17)^2 + (17-17)^2 + (19-17)^2] = 48$

B: متوسطات - ب
•B1 = 13
•B2 = 17
•B3 = 21
X .j ⟵

4) SSB:

$SSB = na \sum (\bar{B} - \bar{\bar{X}})^2$, n. a = 2x3=6

$SSB = 6[(13-17)^2 + (17-17)^2 + (21-17)^2] = 192$

Cells: متوسطات الـ

celles	B1	B2	B3
A1	11	15	19
A2	13	17	21
A3	15	19	23

X_{ij} ⟵ | $X_{.j}$ ⟵ B: متوسطات •B1 = 13 •B2 = 17 •B3 = 21 | $X_{i.}$ ⟵ A: متوسطات •A1 = 15 •A2 = 17 •A3 = 19

$\bar{\bar{X}} = \mathbf{17}$

5) $SS_{AB} = n \sum (X_{ij} - X_{i.} - X_{.j} + \bar{\bar{X}})^2$

=2x[(11−15−13+17)^2+(15-15-17+17)^2+(19-15-21+17)^2 +
(13-17-13+17)^2]+(17-17-17+17)^2 + (21-17-21+17)^2+
(15-19-13+17)^2 + (19-19-17+17)^2 + (23-19-21+17)^2] = 0

6) $SSE = SST - SSA - SSB - SSAB$

$= 258 - 48 - 192 - 0 = 18$

7) درجات الحرية:

dfA = a − 1 = 3 −1 = 2 , dfB = b − 1 = −1 = 2 ,

dfAB = (a − 1).(b − 1) =2 x 2 = 4,

dfT = N − 1 = 18 − 1 = 17

dfE = a . b . (n − 1) = 17 − 2 − 2 − 4 = 9

8) جدول الانوفا : ANOVA

		df	MS	F_{cal}	F_{tab}	P-value	
SSA	48	2	24	12	4.256	0.00288921	Reject H_0
SSB	192	2	96	48	4.256	1.5803E-05	Reject H_0
SSAB	0	4	0	0	3.633	1	No inter.
SSE	18	9	2				
SST	258	17					

9) القـــــــرار :

1 – يوجد تأثير واضح لطريقة التدريس (العامل A)

2 – يوجد تأثير لنوع الاختبار (العامل B)

3 – لا يوجد تفاعل (ارتباط) بين طريقة التدريس A ونوع الاختبار B .

8 – تحليل الارتباط بين المتغيرات

Correlation Analysis

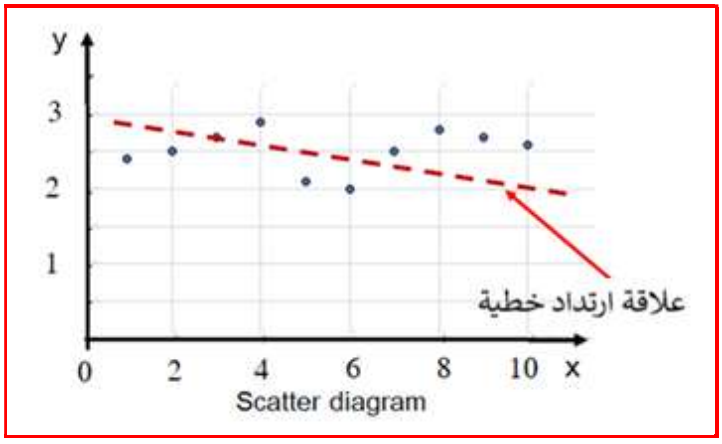
كان حديثنا فيماسبق عن التوزيعات ذات المتغير الواحد (توزيع أحادى) Univarite Distribution ، أما الآن سوف نتحدث عن التوزيعات الاحتمالية ذو المتغيرين (توزيع ثنائي المتغير) Bivariate Distribution .

بفرض وجود عدد n من الارصاد ذات المتغيرين المستقلين :

$(x_1,y_1),(x_2,y_2), \ldots . (x_n,y_n)$ ، وبتوقيع هذه البيانات على محورين يسمى الشكل الناتج Scatter diagram (شكل 24)، والذى يعطى فكرة عن العلاقة بين المتغيرين x ، y .

فى حالة إمكانية وضع هذه العلاقة على شكل معادلة تسمى العلاقة فى هذه الحالة بين المتغيرين معادلة الإنحدار أو "علاقة ارتداد خطية Linear Regression" ، وبذلك يمكن التنبؤ بقيمة المتغير التابع y بدلالة المتغير المستقل x .أي أنه فى حالة وجود علاقة ارتداد بين متغيرين :

سمى أحد المتغيرين بالمتغير المستقل (x) Independent والآخر بالمتغير الغير مستقل (التابع) (y) Dependent .



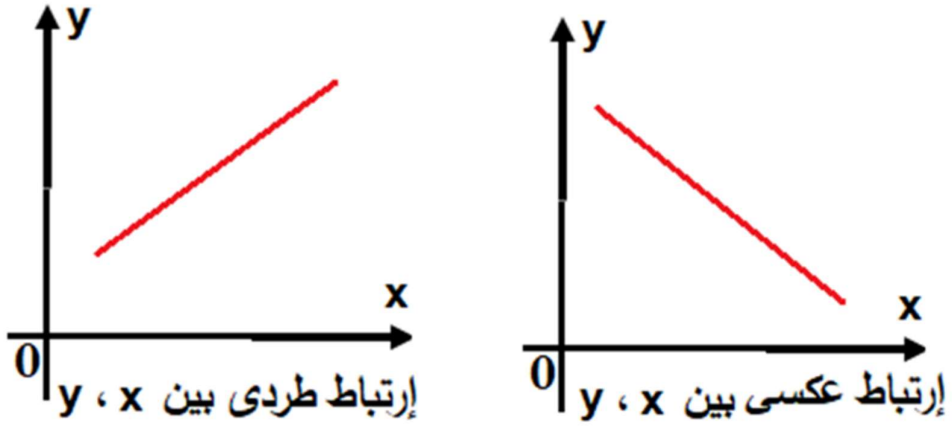
شكل (24)

قبل سرد الأشكال المختلفة لمعادلة الإنحدار Regression وكيفية حسابها ،

يجدر بنا أن نتعرف على درجة الإرتباط بين المتغيرين وهو مايطلق عليه Correlation ، وبعبارة أخرى قياس مدى الترابط بين متغيرين عشوائيين ومستقلين . تنشأ العلاقة بين المتغيريات المستقلة (إثنين على الأقل) ويتبع كل منهم التوزيع العادى (الطبيعى) Normal Distribution ،وبذلك يكون التوزيع المشترك بينهم يتبع التوزيع الطبيعى ذو المتغيرات المستقلة Bivariate Distribution .

مثال ذلك التدخين x وضغط الدم y ، والسؤال هل درجة الترابط بينهما لها تفسير منطقى . الإجابة بالطبع هناك درجة ترابط طردية فبزيادة التدخين يرتفع الضغط والعكس صحيح كماهو مبين فى شكل (25) .

وقد يحدث العكس بين بعض المتغيرات فبزيادة أحدهما x يقل الآخر y أو العكس (الارتفاع فوق سطح الأرض والضغط الجوى) ويسمى في هذه الحالة إرتباط عكسى كماهو مبين فى شكل (25) .



شكل (25)

يعتبر معامل الارتباط Correlation Coefficient (r) مقياس لدرجة الإرتباط بين المتغيرات وتقديرا غير متحيزا للإرتباط الحقيقى للمجتمع ρ .

هناك معاملان للإرتباط :

1 – معامل إرتباط بيرسون للبيانات الكمية فقط (التي تحتوي على أرقام – درجات امتحان ، الطول ...)، ويعتمد على قيم الأرصاد نفسها.

2 – معامل إرتباط سبيرمان للبيانات الكمية(الطول ، الوزن) أو البيانات الوصفية (تقديرات نجاح ورسوب)، ويعتمد على ترتيب القيم.

أ – معامل الارتباط بيرسون

يمكن تعيين معامل الإرتباط r (بيرسون) لعينة حجمها n :

(x_1,y_1) , (x_2,y_2) , ...(x_n,y_n) من العلاقة التالية ، وقد سبق الحديث عنها فى الجزء الخاص بنظرية الأخطاء :

$$r = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{[\sum(x_i - \overline{x})^2][\sum(y_i - \overline{y})^2]}} \quad ..,(142a)$$

حيث : $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ $\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$,

كمايمكن استخدام العلاقة التالية :

$$r = \frac{\sum xy \quad - \quad \frac{\sum x.\sum y}{n}}{\sqrt{\sum x^2 \quad - \quad \frac{(\sum x)^2}{n}) \, (\sum y^2 \quad - \quad \frac{(\sum y)^2}{n})}} \quad .., \quad (142b)$$

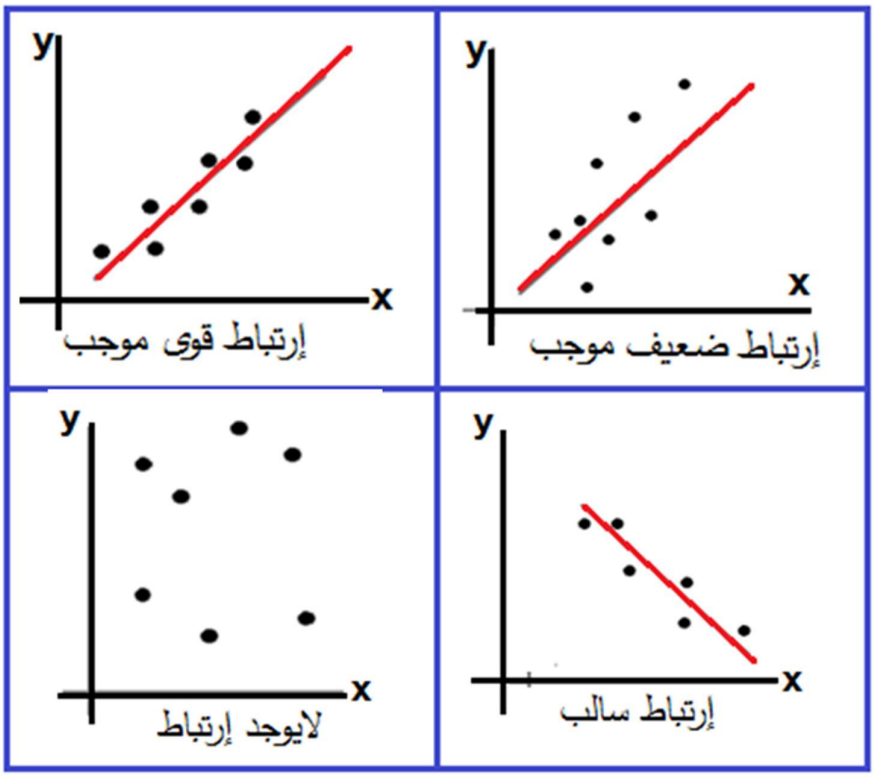
مع ملاحظة أن :

1– معامل الارتباط رقم ليس له وحدات وتتراوح قيمته بين ± 1.

2– إذا كان $r = 0$ فهذا يعنى أن المتغيرين مستقلين عن بعضهما تماما.

3– إذا كان $r = \pm 1$ فهذا يعنى وجود ارتباط طردى تام (+) بين المتغيرين أو إرتباط عكسى تام (–). شكل (26) يوضح درجة الإرتباط بين المتغيرين x , y .

ويمكن وضع مقياس لمعامل الارتباط كماهو مبين في جدول (16).



شكل (26)

جدول (16)

$\|r\|$	Degree of correlation	درجة الارتباط
0	Completely uncorrelated	الأرصاد مستقلة تماما
0 – 0.35	Insignificant correlation	ارتباط عشوائي
0.35 –0.75	Significant correlation	ارتباط معنوي
0.75 –1	Strong correlation	ارتباط قوى
1	Completely correlated	ارتباط تام

<u>مثـــال 1:</u>

المطلوب تعيين معامل الارتباط للبيانات التالية:

x	19	26	10	19	15	18
y	18	30	18	25	12	14

الحـــــل :

يمكن إجراء الحسابات في جدول كالتالى :

	x	y	xy	x^2	y^2
1	19	18	342	361	324
2	26	30	780	676	900
3	10	18	180	100	324
4	19	25	475	361	625
5	15	12	180	225	144
6	18	14	252	324	196
sum	107	117	2209	2047	2513

بالتعويض في العلاقة (142):

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \cdot \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right) \cdot \left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}} = 0.68$$

ويعتبر الإرتباط معنوى بين المتغيرين طبقا للتصنيف السابق ذكره فى جدول (16) ، بمعنى أنه ليس نتيجة لعشوائية إختيار العينة ولكن له أسباب يجب توضيحها وتفسيرها.

كمايمكن استخدام برنامج Excel لحساب معامل الإرتباط بإحدى الطريقتين :

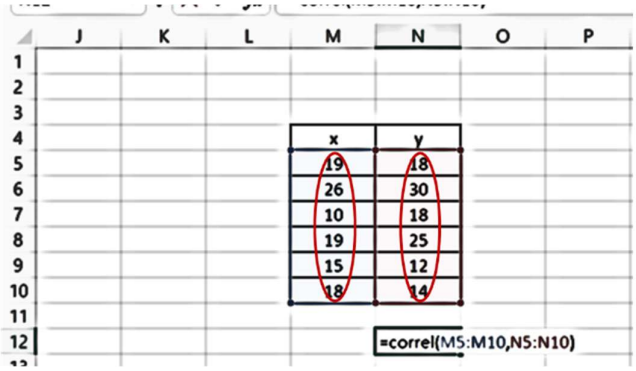
الطريقة الأولى :

– يكتب الأمر التالى في إحدى خلايا شيت الإكسيل:

=correl (variables 1 , variables 2)

في أي خلية مع تحديد موقع المتغير 1 والمتغير 2 .

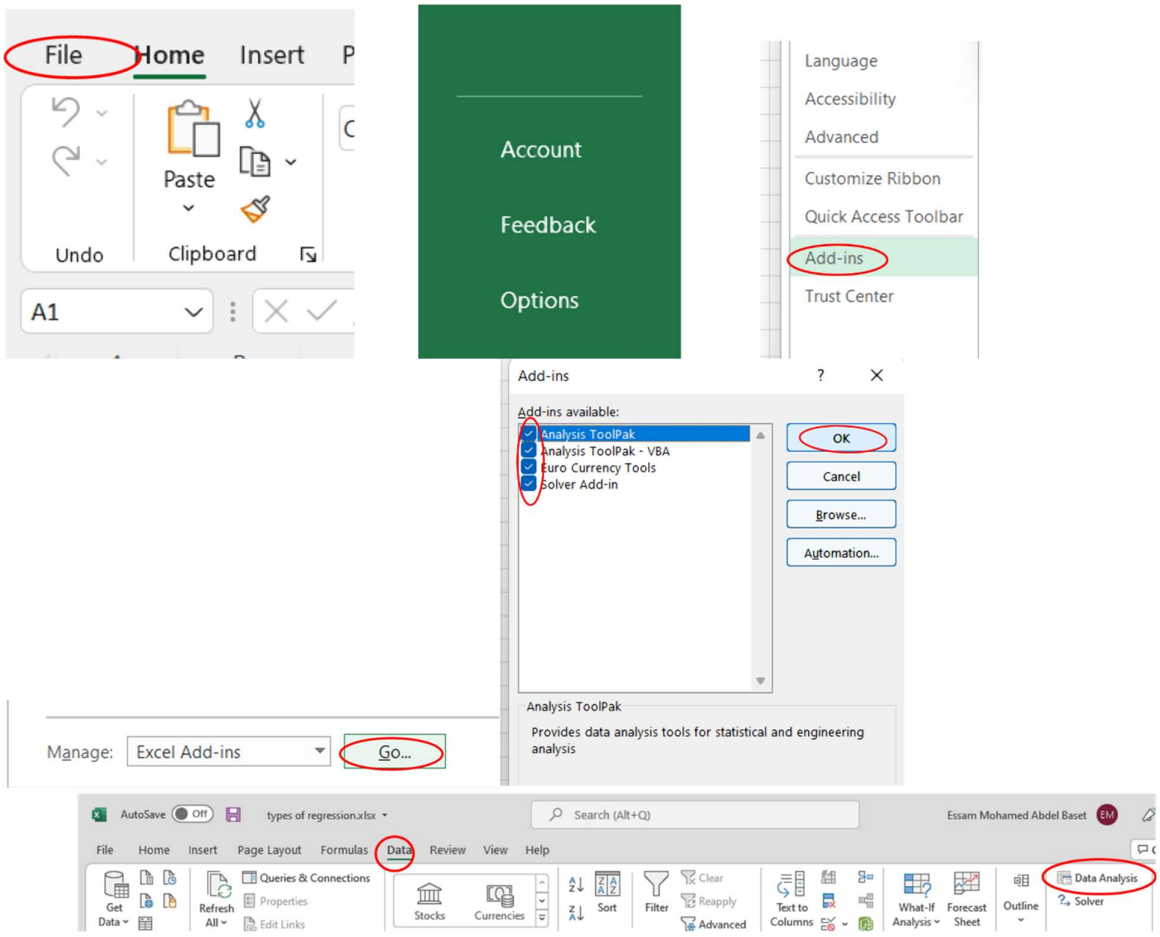
– الضغط على Enter يظهر قيمة الارتباط فى نفس مكان الخلية .

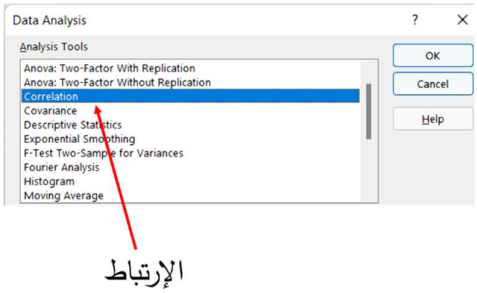


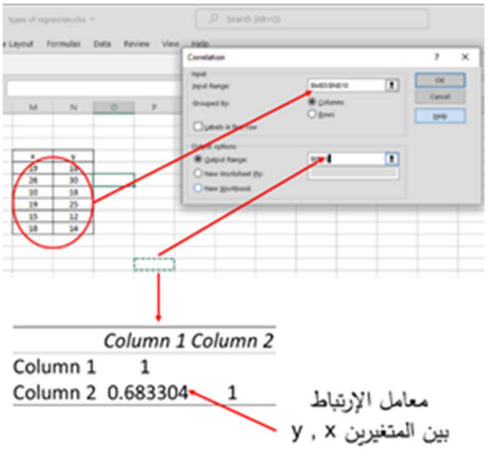
شكل (27)

الطريقة الثانية :

تستخدم للحصول على معاملات الارتباط بين متغيرين أو أكثر ، ولكن لابد من إظهار أيقونة Data Analysis أولا على الايقونة الرئيسية Tools من خلال الخطوات التالية :





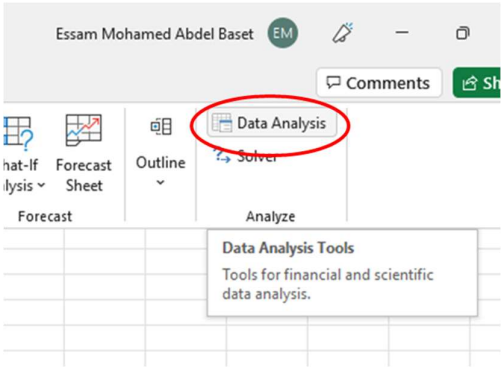


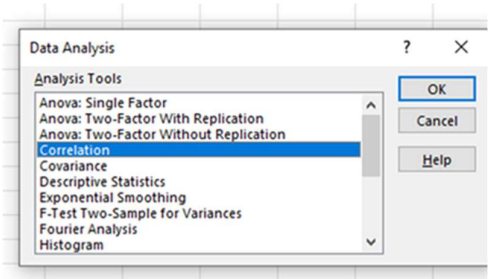
مثال 2:

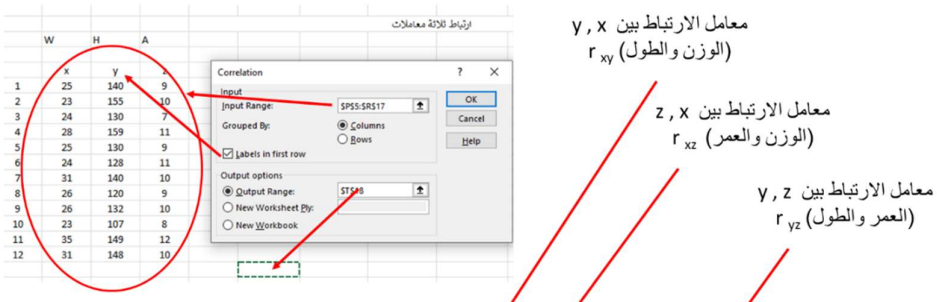
الجدول التالى يبين الأرصاد المأخوذة لإثنى عشر طالب للوزن والطول والسن ، المطلوب تعيين معاملات الارتباط بين الأرصاد مستخدما برنامج Excel.

Weight(kg)	x	25	23	24	28	25	24	31	26	26	23	35	31
Height(cm)	y	140	155	130	159	130	128	140	120	132	107	149	148
Age(year)	z	9	10	7	11	9	11	10	9	10	8	12	10

الحـــــل:







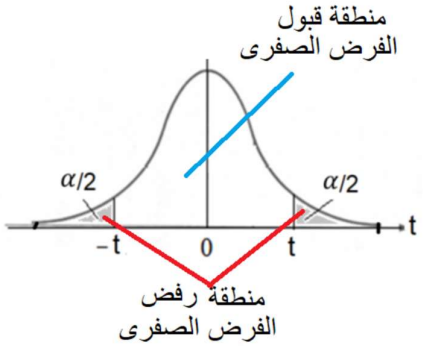
	x	y	z
x	1		
y	0.479425291	1	
z	0.615917883	0.605023116	1

إختبار الفروض على معنوية معامل الإرتباط ρ

يمكن تحديد الفرض الصفرى والفرض البديل كمايلى :

H_0 : $\rho=0$

H_1 : $\rho\neq0$



من الجداول الإحصائية لتوزيع t نوجد القيمة الحرجة $t_{n-2,\alpha}$ حيث α : درجة المعنوية ،

ويحسب المقياس الإحصائى :

$$t = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \quad .., \quad (143)$$

حيث r : معامل الارتباط للعينة ، ρ : معامل الارتباط للمجتمع ، n : حجم العينة .

ثم يتخذ القرار : اذا كان المقياس الإحصائى في منطقة القبول يقبل الفرض الصفرى والعكس إذا كان في منطقة الرفض .

إختبار الفروض على قيمة محددة لمعامل الإرتباط ρ

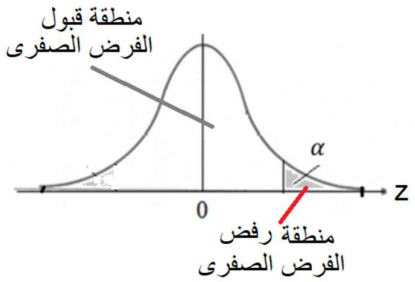
يمكن تحديد الفرض الصفرى والفرض البديل كمايلى :

H_0 : $\rho \leq \rho_0$ (قيمة محددة)

H_1 : $\rho > \rho_0$

درجة المعنوية: α

من الجداول الإحصائية لتوزيع z تحدد مناطق القبول والرفض للفرض الصفرى .



$$z = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \; ln \frac{(1+r)(1-\rho_0)}{(1-r)(1+\rho_0)} \quad .. , \quad (144)$$

, $\ln x = \lg_e x$

ثم يتخذ القرار : إذا كان المقياس الإحصائى في منطقة القبول يقبل الفرض الصفرى والعكس إذا كان في منطقة الرفض .

قد تكون منطقة الرفض على جانبي المنحنى أو على الجانب الأيسر للمنحنى وذلك تبعا للفرضين الصفرى والبديل .

مثـــــال 3:

المطلوب إختبارمعنوية معامل الارتباط 0.68 للمثال السابق لدرجة معنوية 0.05 ، حيث كانت n=6 .

الحـــــــل:

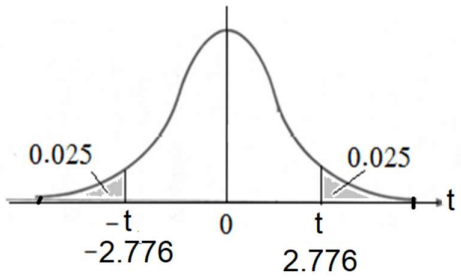
الفرض الصفرى والفرض البديل :

$H_0 : \rho=0$, $H_1 : \rho\neq0$

$t_{n-2,\alpha}= t_{4,0.025} = 2.776$

المقياس الإحصائى (143):

$$t = r . \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0.68 . \sqrt{\frac{6-2}{1-0.68^2}} = 1.854$$



القـــــــرار : المقياس الإحصائى (1.854) في منطقة قبول الفرض الصفرى ، أي أن قيمة معامل الإرتباط ρ=0.

مثـــــال 4:

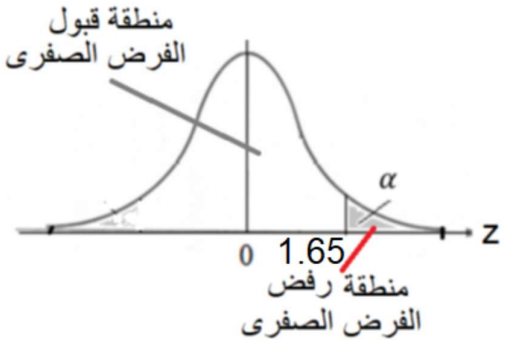
المطلوب إختبار فرض $H_0 : \rho\leq 0.7$ للمثال السابق لدرجة معنوية 0.05 ، حيث كانت n=6 ، r=0.68

الحـــــــل:

المطلوب إختبار $H_0 : \rho \leq 0.7$

الفرض البديل: $H_1 : \rho > 0.7$

$z_\alpha = z_{0.05} = 1.65$



المقياس الإحصائى:

$$z = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \ln \frac{(1+r)(1-\rho_0)}{(1-r)(1+\rho_0)} \quad .. , \quad (144)$$

$$= \frac{\sqrt{6-3}}{2} \ln \frac{(1+0.68)(1-0.7)}{(1-0.68)(1+0.7)} = -0.066$$

القـــــــرار : المقياس الإحصائى (-0.07) في منطقة قبول الفرض الصفرى ،

أي أن $\rho \leq 0.7$.

ب – معامل إرتباط سبيرمان

يستخدم للبيانات الكمية أو البيانات الوصفية ويعتمد على ترتيب القيم.

يتم حساب معامل الارتباط بإتباع مايلى :

1 – ترتيب قيم x وقيم y ترتيبا تصاعديا أو تنازليا لكلا المتغيرين .

2 – إيجاد الفرق d وإيجاد مجموع الفروقات $[d^2] = \sum d^2$

3 – إيجاد قيمة r من العلاقة :

$$r = 1 - \frac{6\,[d^2]}{n(n^2-1)} \quad .., \ (145)$$

يلاحظ :

1 – ان مجموع الفروقات تساوى الصفر : $\sum d=0$

2 – أنه اذا كانت

$$[d^2]= \sum d^2 \ =0$$

، يكون الارتباط طردى تام .

مثـــــال 5:

المطلوب تعيين معامل الارتباط (سبيرمان) للبيانات التالية(كميات):

x	19	26	10	19	15	18
y	18	30	18	25	12	14

الحـــــل :

يمكن إجراء الحسابات في جدول كالتالى :

	x	y	Order of x	Order of y	d	d^2
1	19	18	4.5	3.5	1	1
2	26	30	6	6	0	0
3	10	18	1	3.5	-2.5	6.25
4	19	25	4.5	5	-0.5	0.25
5	15	12	2	1	1	1
6	18	14	3	2	1	1
sum					0	9.50

(4+5)/2 = 4.5

(3+4)/2 = 3.5

ومن العلاقة (145) يمكن تعيين معامل الإرتباط :

$$r = 1 - \frac{6\,[d2]}{n(n2-1)} = 1 - \frac{6\,x9.5}{6(62-1)} = 0.73$$

يلاحظ اختلاف معامل سبيرمان (0.73) عن معامل بيرسون في المثال الأول (0.68) بسبب اعتماد معامل بيرسون على قيم الأرصاد ، بينما يعتمد معامل سبيرمان على ترتيب قيم الأرصاد .

مثـــال 6:

المطلوب تعيين معامل الارتباط لتقديرات عشرة من الطلبة لمادتى الانشاءات (I) والخرسانة (II) .

I	D	B	C	D	D	E	A	E	F	C
II	E	A	B	D	D	E	A	E	E	E

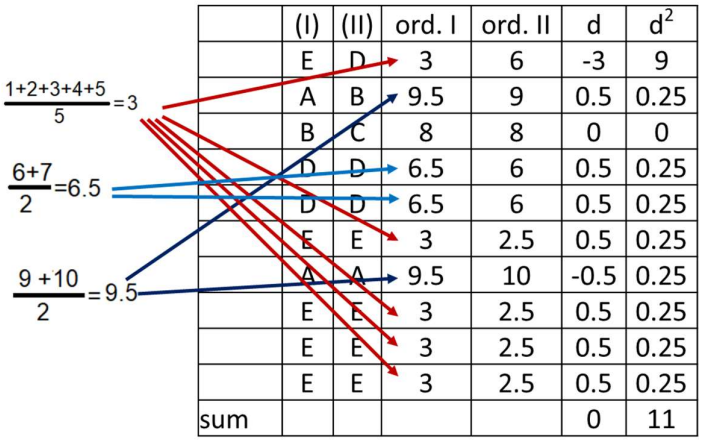
ضعيف جدا :F , ضعيف:E , مقبول:D , جيد:C , جيد جدا :B , ممتاز :A

الحـــل :

يلاحظ أن البيانات المعطاه بيانات وصفية ، لذا لابد من استخدام معامل سبيرمان .

$$n = 10$$

يمكن إجراء الحسابات في جدول كالتالى : $\sum d$ must =0



	(I)	(II)	ord. I	ord. II	d	d^2
	E	D	3	6	-3	9
	A	B	9.5	9	0.5	0.25
	B	C	8	8	0	0
	D	D	6.5	6	0.5	0.25
	D	D	6.5	6	0.5	0.25
	E	E	3	2.5	0.5	0.25
	A	A	9.5	10	-0.5	0.25
	E	E	3	2.5	0.5	0.25
	E	E	3	2.5	0.5	0.25
	E	E	3	2.5	0.5	0.25
sum					0	11

ومن العلاقة (145) يمكن تعيين معامل الإرتباط :

$$r = 1 - \frac{6\,[d2]}{n(n2-1)} = 1 - \frac{6\,x11}{10(102-1)} = 0.93$$

أي أنه يوجد ارتباط طردى قوى بين الدرجات.

9 – الارتداد وتحليل الارتباط

Regression & Correlation Analysis

بفرض وجود عدد n من الارصاد : $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...(x_n,y_n)$ ، وبتوقيع هذه البيانات على محورين سمى الشكل الناتج Scatter diagram ، والذى يعطى فكرة عن العلاقة بين متغيرى البيانات x , y .

إذا أمكن توصيل البيانات المرسومة بخط مستقيم سميت العلاقة فى هذه الحالة بين المتغيرين "علاقة ارتداد خطية Linear Regression" ، فيماعدا ذلك تكون العلاقة غير خطية .

فى حالة وجود علاقة ارتداد بين متغيرين :

سمى أحدهما بالمتغير المستقل (x) Independent

والآخر بالمتغير الغير مستقل (التابع) Dependent (y) .

حيث أنه بتغير قيمة x تتغير قيمة y تبعا لذلك .

أنـــــــواعه:

1 - الانحدار الخطي البسيط :فى حالة وجود متغير مستقل واحد والعلاقة بين المتغيرين خطية .

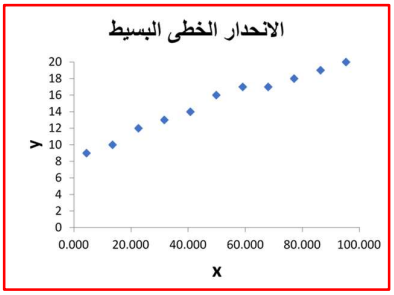
2 - الانحدار المتعدد : فى حالة وجود اكثر من متغير مستقل والعلاقة بين المتغيرات خطية .

3 – الانحدار غير الخطى : اذا كانت العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة غير خطية .

1 - الانحدار الخطي البسيط

Linear Regression

يختص بدراسة العلاقة بين المتغير المستقل x والمتغير التابع Y بغرض التنبؤ Prediction بقيمة المتغير التابع بمعلومية المتغير المستقل . العلاقة بين المتغيرين يمكن تمثيلها فى صورة علاقة دالية يمثل المحور الافقى فيها المتغير المستقل والمحور الرأسى المتغير التابع كما هو موضح فى شكل (28) .



شكل (28)

معادلة خط الانحدار تكون على الصورة :

$$\hat{y} = a + bx \quad .., \qquad (146$$

أو يأخذ الصورة:

$$\hat{y} = y + b(x - \bar{x}) \quad .., \ (147)$$

حيث تمثل :

x : المغير المستقل ، y : المغير التابع ، $\hat{y}$: القيمة التقديرية للمتغير التابع ،

$\bar{x}$: متوسط المتغير المستقل ، $\bar{y}$: متوسط المتغير التابع ،

المعامل a : قيمة المتغير التابع y عندما تكون $x = 0$ ، وهو نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور y .

المعامل b : معامل الانحدارالخطى وقد يأخذ الصورة by.x (معامل انحدار y على x وهو ميل خط الانحدار (θ)):

فى حالة وجود رصدتين فقط (x_2,y_2) , (x_1,y_1) ، وبالتعويض فى العلاقة (146) :

$$y_1 = a + bx_1$$

$$y_2 = a + bx_2$$

بالطرح يمكن تعيين معامل الانحدار الخطى $b(b_{y.x})$:

$$b = b_{y.x} = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad .., \quad (148)$$

وفى حالة تواجد عدد n من الارصاد يمكن تعيين قيم a , b باستخدام نظرية اقل مجموع للمربعات .

بفرض أن:

$\bar{x}$, $\bar{y}$:متوسطات المتغيرين ، n : عدد مفردات المتغير

SP_{xy}: مجموع حواصل ضرب انحرافات x فى انحرافات y .

SS_x : مجموع مربعات انحرافات المتغير المستقل x.

بإجراء الحسابات التالية :

$$SSx = \Sigma(x - \bar{x})(x - \bar{x}) = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \quad .., \quad (149)$$

$$SSy = \Sigma(y - \bar{y})(y - \bar{y}) = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \quad .., \quad (150)$$

$$SPxy = \Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = \sum xy - \frac{\sum x.\sum y}{n} \quad .., \quad (151)$$

يمكن تعيين معامل الانحدار $b_{y.x}$ من العلاقة :

$$b = b_{y.x} = \frac{SP_{xy}}{SS_x} \quad .., \quad (152)$$

خصائص معادلة الارتداد الخطى :

1- معادلة الارتداد الخطى تمر بمركز الارصاد $\overline{x}$, $\overline{y}$.

2- لايمكن وقوع جميع النقاط (x_i , y_i) على خط الانحدار إلإذا كانت العلاقة بين المتغيرين تامة completely correlated أي r = 1.

3 - مجموع القيم المرصودة مساوية لمجموع القيم المقدرة $\sum y = \sum \hat{y}$

4 - $\sum e_i = \sum(\hat{y}_i - y_i) = 0$

5 - $\sum e_i^2 = min$

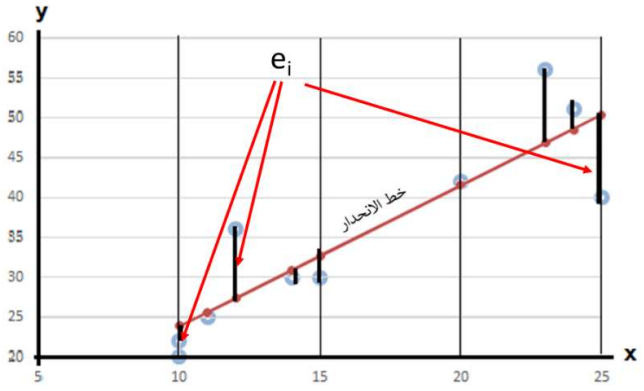
من ذلك نرى أنه لأى رصدة i توجد قيمتان احداهما نحصل عليها من القياس المباشر y_i ، وقيمة أخرى $\hat{y}_i$ مستنتجة (قيمة تقديرية) من معادلة الإنحدار (146):

$$\hat{y} = a + bx$$

الفرق (الإنحراف) بين القيمتين المرصودة والمقدرة e_i يمكن تعيينها من العلاقة :

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + b\, x_i) \quad .., \quad (153)$$

كمايمكن اظهارها كمافى شكل (29) :



شكل (29)

تقدير المعاملا ت a, b بنظرية أقل مجموع للمربعات يكون على أساس أن مجموع مربعات الفروقات (153) أقل مايمكن أى أن :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 = \min \quad .., (I)$$

وللحصول على المعاملات a, b تجرى التفاضلات الجزئية بالنسبة لكل معامل ومساواة الناتج بالصفر ، فنحصل على عدد من المعادلات (المعادلات الأصولية Normal Equ.) مساوى للمعاملات المجهولة ، بحلها نحصل على المعاملات كمايلى:

$$b = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{n\sum xy \;\; \sum y.\sum x}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \ldots, (152)$$: Regression Coef.

$$a = \bar{y} - b.\ \bar{x} \qquad .., (153)$$: Intercept

من شروط الحصول على معادلة الانحدار الخطى لابد:

أن تكون العينة ممثلة للمجتمع .

أن يتبع المتغيرين التوزيع الطبيعى .

ان يكون هناك تجانس فى المتغيرين .
وجود علاقة ارتباط بين المتغيرين .

اختبار معنوية معامل الانحدار باستخدام توزيع t .

والمقصود به معرفة مااذا كان معامل الارتداد b يختلف معنويا عن الصفر ، وذلك باستخدام توزيع t.

الفرض الصفرى والبديل :

$$H_o: b = 0$$

$$H_1: b \neq 0$$

لتعيين القيمة المختبرة تجرى الحسابات التالية:

يحسب الخطأ المعيارى لمعامل الانحدار من العلاقة:

$$S_b = \sqrt{\frac{SS_{y.x}}{SS_x(n-2)}} \qquad .., \quad (154)$$

حيث :

$$SS_{y.x} = SS_y - \frac{SP_{xy}^2}{SS_x} \quad .., \qquad (155)$$

وتكون القيمة المختبرة :

$$t_{calc} = \frac{b}{S_b} \quad .., \quad (156)$$

حيث تتبع توزيع t بدرجة حرية : $\nu = n - 2$

$$t_{tab} = t_{0.05/2,(n-2)} \quad .., \qquad (157)$$

اختبار معنوية معامل الانحدار باستخدام توزيع F .

بفرض أن معادلة الانحدار الخطى المستنتجة بنظرية أقل مجموع للمربعات على الصورة :

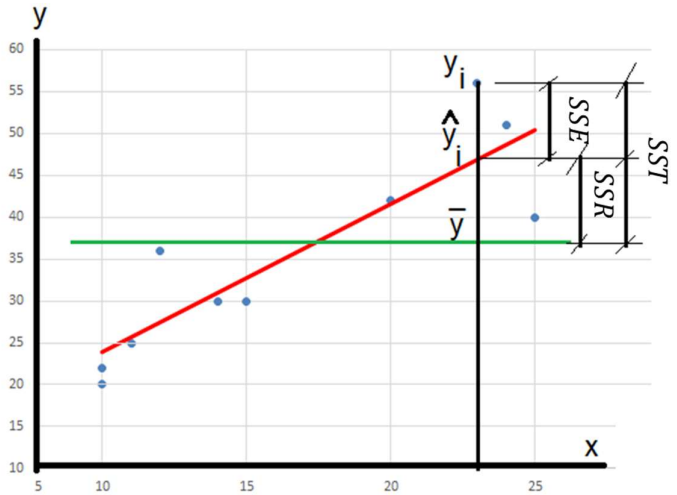
$$\hat{y} = a + b\,x$$

الفرض الصفرى والبديل :

$$H_o: b = 0$$

$$H_1: b \neq 0$$

يمكن تقسيم مجموع مربعات الانحرافات الكلية فى y الى جزئين كماهو مبين بالشكل التالى:



شكل (30)

1 - Variation due to residual errors (SSE) مجموع مربع الانحرافات للخطأ العشوائى = $\sum(y_i - \hat{y}_i)^2$

2 - Variation due to regression (SSR) مجموع مربع الانحرافات الراجع للارتداد = $\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$

3 - Total Variation (SST) مجموع مربع الانحرافات = $\sum(y_i - \bar{y})^2$

$$\sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 \ldots, (158)$$

$$SST = SSE + SSR$$

مصدر الاختلاف	Variation	درجة الحرية df	Variance =Variation/df
Variation due to regression مجموع مربع الانحرافات الراجع للارتداد	$SSR = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	1	$\sigma_y^2 = \frac{SSR}{1}$
Variation due to residual errors مجموع مربع الانحرافات للخطأ العشوائى	$SSE = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$	n-2	$\sigma_e^2 = \frac{SSE}{n-2}$
Total Variation SST=SSy+SSE مجموع مربع الانحرافات	$SST = \sum(y_i - \bar{y})^2$	n-1	$F_{cal} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_e^2} = \frac{SST}{SSE}$ (n-2)

تقارن القيمة المحسوبة F_{cal} بالقيمة الجدولية $F_{\alpha,1,n-2}$ فاذا كانت اكبر منها يرفض الفرض الصفرى أي أن معامل الانحدار لايساوى الصفر وأن النموذج ملائم ، بمعنى أن المتغير المستقل دال إحصائيا في توقعه للمتغير التابع.

مثـــــــال 1:

المطلوب تعيين معادلة الارتداد الخطى للارصاد التالية :

x	16	18	20	12	9	15	30	25	18	12
y	35	45	51	20	23	35	50	45	30	25

للأرصاد المبينة بالجدول المطلوب تعيين معادلة الارتداد الخطى ، عين قيم y لكل قيمة من x وبين مايمثله معامل الارتداد .

الحـــــــل :

	x	y	x^2	y^2	x.y	$\hat{y}$	$e = y - \hat{y}$
	16	35	256	1225	560	33.634	1.366
	18	45	324	2025	810	36.655	8.345
	20	51	400	2601	1020	39.676	11.324
	12	20	144	400	240	27.593	-7.593
	9	23	81	529	207	23.062	-0.062
	15	35	225	1225	525	32.124	2.876
	30	50	900	2500	1500	54.780	-4.780
	25	45	625	2025	1125	47.228	-2.228
	18	30	324	900	540	36.655	-6.655
	12	25	144	625	300	27.593	-2.593
sum	175	**359**	3423	14055	6827	**359.000**	**0.000**
av	17.5	35.9					
n	10						

$\bar{x} = 17.5 \quad , \quad \bar{y} = 35.0$

باستخدام العلاقة (152):

$$b = \frac{n\sum xy - \sum y.\sum x}{n\sum x^2 - (\sum x\ )^2} = 1.5104$$

بالتطبيق فى العلاقة (153): $a = \bar{y} - b\ .\ \bar{x} = 1.4215$

وتكون معادلة الارتداد : $y = 9.4680 + 1.5104\ x$

مثـــــــال 2 :

تعيين العلاقة بين المتغير المستقل x والمتغير التابعy.

x	15	20	24	10	10	12	23	25	14	11
y	30	42	51	22	20	36	56	40	30	25

المطـــــلوب :

1 - تعيين معادلة الارتداد الخطى للارصاد المبينة ، عين قيم y لكل قيمة من x مستنتجة من المعادلة التى يتم الحصول عليها وبين مايمثله معامل الارتداد .

2 – اختبر معنوية معامل الانحدار.

الحـــــــــل:

يمكن اجراء الحسابات فى جدول كالتالى:

	x	y	(x-$\bar{x}$)	(x-$\bar{x}$)^2	(y-$\bar{y}$)	(y-$\bar{y}$)^2	(x-$\bar{x}$)(y-$\bar{y}$)	$\hat{y}$	$e = y - \hat{y}$
	15	30	-1.4	1.96	-5.2	27.04	7.28	32.72855	-2.72855
	20	42	3.6	12.96	6.8	46.24	24.48	41.55515	0.444853
	24	51	7.6	57.76	15.8	249.64	120.08	48.61642	2.383578
	10	22	-6.4	40.96	-13.2	174.24	84.48	23.90196	-1.90196
	10	20	-6.4	40.96	-15.2	231.04	97.28	23.90196	-3.90196
	12	36	-4.4	19.36	0.8	0.64	-3.52	27.4326	8.567402
	23	56	6.6	43.56	20.8	432.64	137.28	46.8511	9.148897
	25	40	8.6	73.96	4.8	23.04	41.28	50.38174	-10.3817
	14	30	-2.4	5.76	-5.2	27.04	12.48	30.96324	-0.96324
	11	25	-5.4	29.16	-10.2	104.04	55.08	25.66728	-0.66728
sum	164	352	0.000	326.4	-2.8E-14	1315.6	576.2	352	-5.7E-14
aver	16.4	35.2		=		=	=		
				ssx		ssy	spxy		

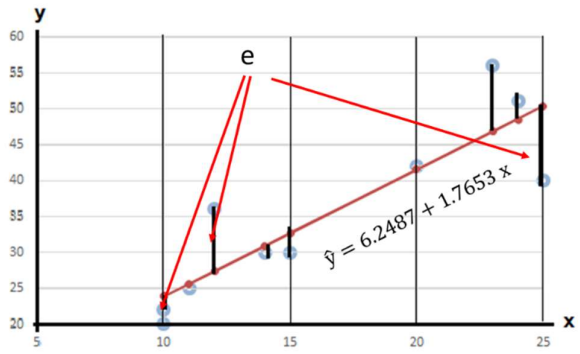
$$b = \frac{SP_{xy}}{SS_x} = \frac{576.2}{326.4} = 1.765$$

$$a = \bar{y} - b_{y.x} \,.\, \bar{x} = 35.2 - 1.765x16.4 = 6.248$$

وبذلك تكون معادلة خط الانحدار:

$$\hat{y} = 6.248 + 1.765\ x$$

شكل (31) يوضح العلاقة الخطية بين المتغيرين.



شكل (31)

اختبار معنوية معامل الانحدار والمقصود به معرفة ماذا كان معامل الارتداد b يختلف معنويا عن الصفر ،

الفرض الصفرى والبديل :

$$H_o: b = 0$$

$$H_1: b \neq 0$$

$$1 - SS_{y.x} = SS_y - \frac{SP_{xy}^2}{SS_x} = 298.243$$

$$2 - S_b = \sqrt{\frac{SS_{y.x}}{SS_x(n-2)}} = 0.3381$$

$$3 - t_{calc} = \frac{by.x}{S_b} = 5.2219$$

4 - وتتبع توزيع t بدرجة حرية $v = n - 2$:

$$5 - t_{tab} = t_{0.05/2,(n-2)} = t_{0.025,8} = 2.31$$

$$t_{cal} > t_{tab}$$

ويعنى ذلك رفض الفرض الصفرى أى توجد علاقة حقيقية ومعنوية جداً علي مستوي معنوية 5%
بين المتغيرين y، x ، يمكن تمثيل هذه العلاقة فى صورة دالية في خط مستقيم معادلته هي :

$$\hat{y} = 6.248 + 1.765\ x$$

باستخدام برنامج الاكسيل نحصل على نتائج تحليل الانحدار الخطي(Regression) :

تفسير محتوى الجداول:

1 -Regression Statistics*:*

SUMMARY OUTPUT	القيمة	المعنى
Multiple R	0.879	معامل الارتباط بين القيم الفعلية والقيم التي يتنبأ بها نموذج الانحدار. قيمة 0.879 تعني وجود ارتباط قوي جدًا. تستخدم فى نموذج الانحدار الخطى المتعدد، $R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.773} = 0.879$
R Square	0.773	معامل التحديد، ويعني أن النموذج يفسر حوالي 77.3% من التغير في المتغير التابع. في الانحدار الخطي البسيط، أي عندما يكون لديك متغير مستقل واحدX ، تكون مساوية لمربع . Multiple R يمكن استنتاجها من جدول الانوفا والمبين لاحقا. $R^2 = \frac{SS_{Regression}}{SS_{Total}} = \frac{1017.177}{1315.600} = 0.773$
Adjusted R Square	0.745	معامل التحديد المعدّل، وتُستخدم خصوصًا عند وجود أكثر من متغير مستقل. النموذج يفسر حوالي 74.5% بعد التعديل
Standard Error	6.108	الخطأ المعياري للتقدير، ويعطي فكرة عن متوسط حجم الخطأ في تنبؤات النموذج. كلما كان أقل عادةً كان النموذج أدق.
Observations	10	عدد المشاهدات أو البيانات المستخدمة في التحليل، أي أن التحليل أُجري على 10 حالات/ملاحظات.

الحكم على معنوية النموذج إحصائيًا من خلال جدول ANOVA وقيمة Significance F، وكذلك جدول Coefficientsلمعرفة تأثير كل متغير وقيمة P-value الخاصة به.

2 - ANOVA:

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*	
Regression	1	1017.177	1017.177	27.268	0.001	0.001 < 0.05
Residual	8	298.423	37.303			نموذج الانحدار دال إحصائيًا
Total	9	1315.600				

يمكن تفسير النتائج بأن نموذج الانحدار الخطي كان دالًا إحصائيًا، حيث بلغت قيمة اختبار27.268 F ، وبلغت قيمة Significance F = 0.001، وهي أقل من مستوى الدلالة .0.05كما بلغ معامل التحديد R^2 = 0.773، مما يشير إلى أن المتغير المستقل يفسر نحو 77.3%من التباين في المتغير التابع.

3 - Coefficients:

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 5%*
Intercept	6.2488	5.8710	1.0643	0.3182	-7.2898	19.7873
x	1.7653	0.3381	5.2219	0.0008	0.9857	2.5449

من هذا الجدول b=1.7653 ، P-value = 0.0008

هذا يعني أنه عند زيادة X بمقدار وحدة واحدة، فإن المتغير التابع Y يزداد في المتوسط بمقدار 1.7653 وحدة، بافتراض ثبات العوامل الأخرى . وبما أن المعامل موجب، فالعلاقة بين X و Yطردية.

وبما أن: 0.0008 < 0.05 ، فإن تأثير X على Y دال إحصائيًا عند مستوى معنوية 5%

كذلك يلاحظ أن القيمة أقل بكثير من 0.01، وبالتالي يمكن القول إن التأثير دال إحصائيًا عند مستوى 1% أيضًا.

قيمة t = 5.2219 كبيرة نسبيًا، وهذا يدعم وجود تأثير حقيقي للمتغير X علىY

فترة الثقة 95% ، الفترة الخاصة بمعامل X هي: 0.9857إلى 2.5449

أي أننا نستطيع القول أن الزيادة في Y الناتجة عن زيادة X تقع تقريبًا بين 0.9857 ، 2.5449 بمستوى ثقة 95%، يلاحظ أن هذه الفترة لا تحتوي على الصفر، وهذا يدعم أيضًا أن تأثير X دال إحصائيًا.

Intercept = 6.2488 وهو الثابت في معادلة الانحدار، هذا يعني أنه عندما تكون قيمة X = 0، فإن القيمة المتوقعة لـ Y = 6.2488.

قيمة P-value = 0.3182، أكبر من 0.05، لذلك فإن الثابت غير دال إحصائيًا عند مستوى 5.% ، وفترة الثقة له: 7.2898-إلى 19.7873 وتحتوي على الصفر، وهذا يتفق مع عدم دلالته الإحصائية.

بمعامل Intercept ومعامل X، تكون معادلة الانحدار: $Y=6.2488+1.7653X$

الخلاصة:

نتائج التحليل تشير إلى وجود علاقة طردية ودالة إحصائيًا بين X وYفقد بلغ :

1 - معامل الانحدار 1.7653، مما يعني أن زيادة X بوحدة واحدة تؤدي إلى زيادة متوقعة في Y بمقدار 1.7653وحدة .

2 - قيمة P-value = 0.0008 < 0.05، مما يؤكد أن تأثير X دال إحصائيًا.

2 - $R^2 = 0.773$ ، أي أن النموذج يفسر 77.3%من التباين في Y ،
3 - نموذج الانحدار ككل دالًا إحصائيًا

باختصار X :يؤثر على Y تأثيرًا موجبًا وقويًا ودالًا إحصائيًا.

معادلة الانحدار الخطي المتعدد

إذا كان لديك متغير تابع Y متغيران مستقلان X_1 , X_2 ، فإن معادلة الانحدار الخطي المتعدد تكون معادلة الانحدار الخطى المتعدد :

$$\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2 \quad .., \quad (159)$$

حيث:

- a : ثابت الانحدار
- b_1: معامل الانحدار للمتغير X_1
- b_2 : معامل الانحدار للمتغير X_2

فى حالة وجود عدد n من الارصاد ومتوسطاتها ، تجرى الحسابات التالية لتعيين معادلة الانحدار:

1 – متوسط الارصاد: $\overline{X1}$, $\overline{X2}$, $\bar{Y}$

2 – ايجاد القيم :

$$S_{11} = \sum (X_1 - \overline{X1})^2 \quad .., \quad (160)$$

$$S_{22} = \sum (X_2 - \overline{X2})^2 \quad .., \quad (161)$$

$$S_{12} = \sum (X_1 - \overline{X1})(X_2 - \overline{X2}) \quad .., \quad (162)$$

$$S_{1Y} = \sum (X_1 - \overline{X1})(Y - \bar{Y}) \quad .., \quad (163)$$

$$S_{2Y} = \sum (X_2 - \overline{X2})(Y - \bar{Y}) \quad .., \quad (164)$$

3 - يحسب معاملى الانحدار:

$$b_1 = \frac{S_{1Y}S_{22} - S_{2Y}S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad .., \quad (165)$$

$$b_2 = \frac{S_{2Y}S_{11} - S_{1Y}S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad .., \quad (166)$$

4 – تعيين المعامل a:

$$a = \bar{Y} - b_1\overline{X1} - b_2\overline{X2} \quad .., \quad (16\,7)$$

وبذلك تكون معادلة الانحدار :

$$\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2 \quad .., \quad (168)$$

مثـــــــال:

إذا كان المتغير التابع Yوالمتغيران المستقلان X_1 , X_2 ، المطلوب تعيين معادلة الانحدار الخطي المتعدد من الارصاد التالية :

y	x1	x2
50	10	2
65	15	3
70	18	3
85	22	4

الحـــــل:

تجرى الحسابات التالية: $dx_1 = \bar{x}_1 - x_1$, $dx_2 = \bar{x}_2 - x_2$, $dy = \bar{y} - y$

	Y	X_1	X_2	dY	dX_1	dX_2	dX_1^2	dX_2^2	dX_1dX_2	dX_1dY	dX_2dY
	50	10	2	-17.5	-6.25	-1	39.063	1	6.25	109.38	17.5
	65	15	3	-2.5	-1.25	0	1.5625	0	0	3.125	0
	70	18	3	2.5	1.75	0	3.0625	0	0	4.375	0
	85	22	4	17.5	5.75	1	33.063	1	5.75	100.63	17.5
avg	67.5	16.25	3								
sum							76.75	2	12	217.5	35
							S11	S22	S12	S1y	S2y

معاملي الانحدار:

$$b_1 = \frac{S_{1Y}S_{22} - S_{2Y}S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{217.5x2 - 35x12}{76.75x2 - 12^2} = 1.5789$$

$$b_2 = \frac{S_{2Y}S_{11} - S_{1Y}S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{35x76.75 - 217.5x12}{76.75x2 - 12^2} = 8.0263$$

تعيين المعامل a :

$$a = \bar{Y} - b_1\overline{X1} - b_2\overline{X2} = 67.5 - 1.5789x16.25 - 8.0263x3 = 17.7639$$

وبذلك تكون معادلة الانحدار :

$$\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2$$

$$\hat{Y} = 17.7639 + 1.5789X_1 + 8.0263X_2$$

باستخدام برنامج اكسيل نحصل على الجداول التالية :

1 -Regression Statistics:

Regression Statistics		
Multiple R	0.999474	قيمة الارتباط بين القيم الفعلية لـ Y والقيم المتوقعة بواسطة نموذج الانحدار. وهي قريبة جدًا من 1، مما يشير إلى وجود علاقة خطية قوية جدًا بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة X1,X2.
R Square	0.998947	النموذج يفسر حوالي 99.89%من التغير في المتغير التابع Yبواسطة X1وX2.
Adjusted R Square	0.996842	وتأخذ في الاعتبار عدد المتغيرات المستقلة وحجم العينة.وهومرتفع جدًا، مما يشير إلى أن النموذج يحتفظ بقدرته التفسيرية العالية حتى بعد أخذ عدد المتغيرات وحجم العينة في الاعتبار.
Standard Error	0.811107	يمثل الخطأ المعياري للتنبؤ، أي مقدار التشتت التقريبي للقيم الفعلية حول القيم التي يتنبأ بها نموذج الانحدار. كلما كانت هذه القيمة أصغر، كان النموذج أكثر دقة في التنبؤ، مع مراعاة مقياس المتغير التابع.
Observations	4	عدد المشاهدات أو البيانات المستخدمة في التحليل، أي أن التحليل أُجري على 4 حالات/ملاحظات

2.ANOVA:

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression	2	624.3421	312.1711	474.5	0.0324
Residual	1	0.6579	0.6579		نموذج الانحدار دال إحصائيًا
Total	3	625			

1 - درجات الحرية :df

Regression df = 2 لأن لدينا متغيرين مستقلين X1, X2

Total df n−1=4−1=3 لأن n=4مشاهدات.

Residual df=3−2=1

2 - مجموع المربعات:

SSTotal = SSRegression + SSResidual

625 = 624.3421 + 0.6579

إذن معظم التباين في Yتم تفسيره بواسطة نموذج الانحدار، بينما الجزء غير المفسر صغير جدًا.

بالنسبة للانحدار:

$MS_{Regression}$=624.3421/2 =312.1711

وبالنسبة للخطأ:

$MS_{Residual}$=0.6579/1 =0.6579

F=312.1711/0.6579 = 474.5

3 - اختبار الفروض:

$$H_0: \quad b_1 = b_2 = 0$$

$$H_1: \quad b_1 \; or \; b_2 \neq 0$$

Significance F = 0.0324 , F> Significance F

p=0.0324 <0.05اذن نرفض H_0 عند مستوى معنوية 0.5%

أى أن نموذج الانحدار ككل معنوي إحصائيًا عند مستوى 5 .% ، أي أن X1و X2معًا لديهما قدرة تفسيرية ذات دلالة إحصائية على .Y

3 - Coefficients:

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*
Intercept	17.7632	1.8839	9.4288	0.0673	-6.1744	41.7007
x1	1.5789	0.3722	4.2426	0.1474	-3.1498	6.3077
x2	8.0263	2.3054	3.4815	0.1781	-21.2672	37.3198

من قيم **Coefficients** تكون المعادلة : $y = 17.7632 + 1.5789x_1 + 8.0263\ x_2$

معامل الـ Intercept **غير معنوي عند 5 %**لأن P-value=0.0673>0.05

وفترة الثقة 95% هي: [−6.1744, 41.7007] ، وبما أن الصفر موجود داخل فترة الثقة، فإن الـ Intercept ليس معنويًا عند مستوى 5.%

تفسير x1 : $b_1=1.5789$

أي عند زيادة X1بمقدار وحدة واحدة، مع ثبات X2، فإن Y**يزداد في المتوسط بمقدار 1.5789**.

لكن: P=0.1474>0.05

إذن X1**غير معنوي إحصائيًا عند مستوى 5.%**

وفترة الثقة:

[−3.1498, 6.3077]

وتحتوي الصفر، وهذا يؤكد عدم المعنوية عند 5.%

تفسير x2 : $b_2=8.0263$

أي عند زيادة X2بوحدة واحدة، مع ثبات X1، فإن Y**يزداد في المتوسط بمقدار 8.0263**.

لكن P=0.1781>0.05

إذن X2أيضًا **غير معنوي إحصائيًا عند مستوى 5.%**

وفترة الثقة:

[−21.2672, 37.3198]

وتحتوي الصفر، لذلك لا توجد دلالة فردية للمعامل عند 5.%

المتغير	المعامل	P-value	الحكم عند 5%
Intercept	17.7632	0.0673	غير معنوي
(x_1)	1.5789	0.1474	غير معنوي
(x_2)	8.0263	0.1781	غير معنوي

إذن **لا نستطيع إثبات أن أيًا من x1أو x2له تأثير فردي معنوي إحصائيًا عند مستوى 5.% لكن النموذج ككل معنوي**

من:ANOVA Significance F=0.0324<0.05 ، إذن **النموذج ككل معنوي إحصائيًا**.

وهذا يعني أن x1و x2**معًا** يقدمان تفسيرًا معنويًا لـ Y، حتى لو لم يظهر كل متغير منفردًا معنويًا.

==========

المراجع

الجداول الاحصائية
Statistical Tables

احتمال عدد ر أو أقل من المفردات الفاشلة حسب توزيع ذى الحدين الاحتمالى

PROBABILITY OF r OR FEWER DEFECTIVES FOR SELECTED BINOMIAL DISTRIBUTIONS, SAMPLE SIZE n, POPULATION WITH DEFECTIVE RATIO p

p	r	n = 5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	40	50	r
.001	0	.9950	.9940	.9930	.9920	.9910	.9900	.9851	.9802	.9753	.9704	.9608	.9512	0
	1							.9999	.9998	.9997	.9996	.9992	.9988	1
	2													
.0027	0	.9866	.9839	.9813	.9786	.9760	.9733	.9601	.9474	.9346	.922I	.9875	.8736	0
	1	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9997	.9993	.9987	.9979	.9970	9947	998	1
	2										.9999	.998	.9996	2
.005	0	.952	.9704	.9655	.9607	.9559	.95II	.9276	.9046	.8882	.8604	.8183	7783	0
	1	.9998	.9996	.9995	.9993	.999I	.9989	.9975	.9955	.993I	.990I	.9828	.9739	1
	2							.9999	.9999	.9997	.9995	.9989	.9979	2
	3											.9999	.9999	3
.01	0	.9510	.9415	.932I	.9227	.9135	.9044	.860I	.8179	.7778	.7397	.6690	.6050	0
	1	.9990	.9985	.9980	.9973	.9966	.9957	.9904	.983I	.9742	.9639	.9393	.9106	1
	2				9999	.9999	.9999	.9996	.9980	.9880	.9967	.9925	9862	2
	3									9999	.9998	.9993	.9984	3
	4												.9999	4
.02	0	.9039	.8858	.8681	.8508	.8337	.8171	.7386	.6676	.6035	.5455	.4457	.3642	0
	1	.9962	.9943	.9921	.9897	.9896	.9638	.9647	.940I	.9II4	.8795	.8095	.7358	1
	2	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9991	.9970	.9929	.9838	.9783	.9563	.92I6	2
	3							.9998	.9994	.9986	.9971	.9918	.9822	3
	4									.9999	.9997	.9988	.9968	4
	5											.9999	.9995	5
	6												.9999	6

تابع توزيع ذى الحدين الاحتمالى (cont) BINOMIAL DISTRIBUTION

p	r	5	6	7	8	9	I0	I5	20	25	30	40	50	r
	0	.8587	.8330	.8080	.7837	.7602	.7374	.6333	.5438	.4670	.4010	.2957	.2181	0
	I	.9915	.9875	.9827	.9777	.9718	.9655	.9270	.8802	.8280	.7731	.6615	.5553	I
	2	.9997	.9995	.9991	.9986	.9980	.9972	.9906	.9790	.9620	.9399	.8822	.8108	2
	3				.9999	.9999	.9999	.9992	.9973	.9938	.9881	.9686	.9372	3
.03	4							.9999	.9997	.9992	.9982	.9933	.9832	4
	5									.9999	.9998	.9983	.9953	5
	6											.9998	.9993	6
	7												.9999	7
	0	.8154	.7827	.7514	.7214	.6925	.6648	.5421	.4420	.3604	.2939	.1954	.1299	0
	I	.9852	.9784	.9706	.9619	.9522	.9418	.8809	.8103	.7358	.6612	.5210	.4005	I
	2	.9994	.9988	.9980	.9969	.9955	.9938	.9797	.9561	.9235	.8831	.7855	.7767	2
.04	3			.9999	.9998	.9997	.9996	.9976	.9926	.9835	.9694	.9252	.8609	3
	4							.9998	.9990	.9972	.9937	.9790	.9510	4
	5								.9999	.9996	.9989	.9951	.9856	5
	6										.9999	.9990	.9964	6
	7											.9998	.992	7
	8												.9995	8
	0	.7738	.7351	.6983	.6634	.6302	.5987	.4633	.3585	.2774	.2146	.1285	.0769	0
	I	.9774	.9672	.9556	.9428	.9288	.9139	.8290	.7358	.6424	.5535	.3991	.2794	I
	2	.9988	.9978	.9962	.9942	.9916	.9885	.9638	.9245	.8729	.8122	.6767	.5405	2
	3		.9999.	.9998	.996'	.9994	.9990	.9945	.9841	.9659	.9392	.8618	.7604	3
	4						.9999	.9991	.9974	.9928	.9844	.9520	.8964	4
.05	5							.9999	.9997	.9988	.9967	.9861	.9622	5
	6									.9998	.9994	.9966	.9882	6
	7										.9999	.9993	.9968	7
	8											.9999	.9992	8
	9												.9998	9

BINOMIAL DISTRIBUTION (cont) تابع توزيع ذى الحدين الاحتمالى

Sample Size n

p	r	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	40	50	r
.06	0	.7339	.6899	.6485	.6096	.5730	.5386	.3953	.2901	.2129	.1563	.0842	.0453	0
	1	.9681	.9541	.9382	.9208	.9022	.8824	.7738	.6605	.5527	.4555	.2990	.1900	1
	2	.9980	.9962	.9937	.9904	.9862	.9812	.9429	.8850	.8129	.7324	.5665	.4162	2
	3	.9999	.9998	.9996	.9993	.9987	.9980	.9896	.9710	.9402	.8974	.7827	.6422	3
	4					.9999	.9998	.9986	.9954	.9850	.9685	.9104	.8206	4
	5							.9998	.9994	.9969	.9921	.9691	.9224	5
	6								.9999	.9995	.9983	.9909	.9711	6
	7									.9999	.9997	.9977	.9906	7
	8											.9995	.9973	8
	9											.9999	.9993	9
	10												.9998	10
.07	0	.6557	.6470	.6017	.5596	.5204	.4840	.3367	.2342	.1630	.1134	.0549	.0266	0
	1	.9575	.9392	.9187	.8965	.8729	.8483	.7168	.5535	.4696	.3694	.2201	.1265	1
	2	.9969	.9942	.9903	.9853	.9791	.9717	.9171	.8350	.7466	.6487	.4625	.3108	2
	3	.9999	.9997	.9993	.9982	.9977	.9964	.9825	.9529	.9064	.8450	.6537	.5327	3
	4				.9999	.9998	.9997	.9972	.9893	.9725	.9447	.8546	.7290	4
	5							.9997	.9981	.9935	.9838	.9419	.8650	5
	6								.9997	.9987	.9961	.9802	.9417	6
	7									.9998	.9992	.9942	.9780	7
	8										.9999	.9985	.9927	8
	9											.9997	.9978	9
	10											.9999	.9994	10
	11												.9999	11
.08	0	.6591	.6064	.5578	.5132	.4722	.4344	.2863	.1887	.1244	.0820	.0356	.0155	0
	1	.9456	.9227	.8974	.8702	.8417	.8121	.6597	.5169	.3947	.2958	.1554	.0827	1
	2	.9955	.9815	.9860	.9789	.9702	.9599	.8870	.7879	.6768	.5654	.3694	.2262	2
	3	.9998	.9995	.9988	.9978	.9963	.9942	.9950	.9294	.8649	.7842	.6607	.4253	3
	4			.9999	.9999	.9997	.9994	.9993	.9817	.9549	.9126	.7858	.6290	4
	5							.9999	.9962	.9877	.9707	.9033	.7919	5
	6								.9994	.9972	.9913	.9524	.8818	6
	7								.9999	.9995	.9980	.9873	.9552	7
	8									.9999	.9996	.9963	.9834	8
	9										.9999	.9990	.9944	9
	10											.9998	.9983	10
	11												.9995	11
	12												.9999	12

تابع توزيع ذى الحدين الاحتمالى BINOMIAL DISTRIBUTION (cont)

Sample Size n

r	p	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.40	.50
0		.6240	.5679	.5168	.4703	.4279	.3984	.2430	.1516	.0946	.0591	.0230	.0090
1		.9326	.9048	.8745	.8423	.8088	.7746	.6035	.4516	.3286	.2343	.1140	.0532
2		.9847	.9882	.9807	.9711	.9595	.9460	.8531	.7334	.6063	.4855	.2894	.1605
3		.9987	.9992	.9982	.9966	.9942	.9912	.9601	.9007	.8169	.7175	.5092	.3303
4				.9999	.9997	.9995	.9990	.9918	.9710	.9314	.8712	.7108	.5272
5							.9999	.9987	.9932	.9790	.9519	.8525	.7072
6								.9998	.9987	.9946	.9848	.9361	.8404
7									.9998	.9989	.9959	.9758	.9232
8										.9998	.9990	.9919	.9672
9											.9998	.9976	.9875
10												.9994	.9957
11												.9999	.9987
12													.9996
13													.9999
r	p	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.40	.50
0		.5905	.5314	.4783	.4305	.3874	.3487	.2059	.1516	.0718	.0424	.0148	.0052
1		.9185	.8857	.8503	.8131	.7748	.7361	.5490	.4516	.2612	.1837	.0805	.0338
2		.9914	.9842	.9743	.9619	.9470	.9298	.8159	.6769	.5371	.4114	.2228	.1117
3		.9995	.9987	.9973	.9950	.9917	.9872	.9444	.8670	.7636	.6474	.4231	.2503
4			.9999	.9998	.9996	.9991	.9984	.9873	.9568	.9020	.8245	.6290	.4312
5						.9999	.9999	.9978	.9887	.9666	.9268	.7937	.6161
6								.9997	.9976	.9905	.9742	.9005	.7702
7									.9996	.9977	.9922	.9581	.9102
8										.9995	.9980	.9845	.9679
9										.9999	.9995	.9949	.9904
10											.9999	.9985	.9755
11												.9996	.9906
12												.9999	.9968
13													.9990
14													.9997
													.9999

BINOMIAL DISTRIBUTION (cont) تابع توزيع ذى الحدين الاحتمالى

Sample Size n

r	.5	.6	.7	.8	.9	.10	.15	.20	.25	.30	.40	.50
0	.4437	.3771	.3206	.2725	.2317	.1969	.0874	.0388	.0178	.0076	.0015	.0003
1	.8352	.7765	.7166	.6572	.5995	.5443	.3186	.1756	.0931	.0480	.0121	.0029
2	.9734	.9527	.9262	.8948	.8591	.8202	.6042	.4049	.2537	.1514	.0486	.0142
3	.9718	.9941	.9879	.9786	.9661	.9500	.8227	.6477	.4711	.3217	.1302	.0460
4	.9949	.9996	.9988	.9971	.9944	.9901	.9383	.8298	.6821	.5245	.2633	.1121
5			.9999	.9998	.9994	.9986	.9832	.9327	.8385	.7106	.4325	.2194
6						.9999	.9964	.9781	.9305	.8474	.6067	.3613
7							.9994	.9941	.9745	.9302	.7559	.5188
8							.9999	.9987	.9920	.9722	.8646	.6681
9								.9998	.9979	.9903	.9328	.7911
10									.9995	.9971	.9701	.8801
11									.9999	.9992	.9880	.9372
12										.9998	.9957	.9699
13											.9986	.9868
14											.9996	.9947
15											.9999	.9981
16												.9993
17												.9998
18												.9999

r	.5	.6	.7	.8	.9	.10	.15	.20	.25	.30	.40	.50
0	.3277	.2621	.2097	.1673	.1342	.1074	.0352	.0115	.0038	.0012	.0001	.0000
1	.7373	.6554	.5767	.5033	.4362	.3758	.1671	.0692	.0274	.0105	.0015	.0002
2	.9421	.9011	.8520	.7969	.7382	.6778	.3980	.2061	.0982	.0442	.0079	.0013
3	.9933	.9830	.9667	.9437	.9144	.8791	.6482	.4114	.2340	.1227	.0285	.0057
4	.9997	.9984	.9953	.9896	.9804	.9672	.8358	.6296	.4207	.2552	.0759	.0185
5		.9998	.9996	.9988	.9969	.9936	.9389	.8042	.6167	.4275	.1613	.0480
6				.9999	.9997	.9991	.9819	.9019	.8133	.7608	.6070	.1904
7						.9999	.9958	.9679	.8909	.8713	.4371	.3073
8							.9992	.9900	.9532	.9389	.5931	.4437
9							.9999	.9974	.9827	.9744	.7518	.5836
10								.9994	.9944	.9905	.8392	.7107
11								.9999	.9985	.9969	.9125	.8139
12									.9996	.9991	.9568	.8894
13									.9999	.9998	.9806	.9393
14										.9999	.9921	.9692
15											.9971	.9856
16											.9990	.9937
17											.9997	.9975
18											.9999	.9991
19												.9997
20												.9999
21												

توزيع بواسون الاحتمالى المتجمع لقيم r ، μ مختلفتين

CUMULATIVE POISSON DISTRIBUTION FOR DIFFERENT VALUES OF r AND μ

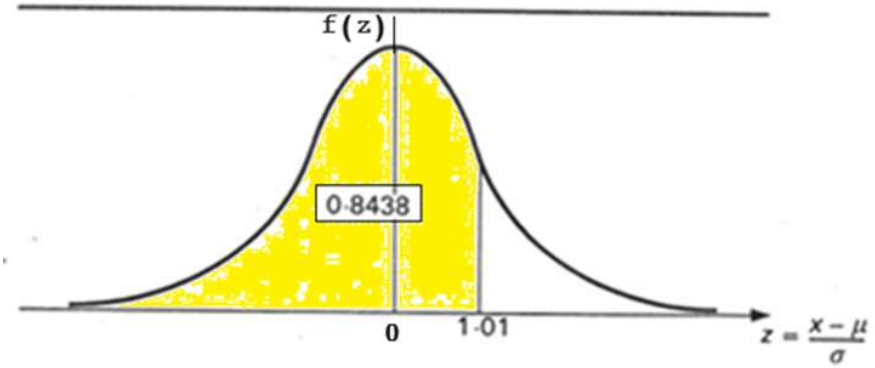
$$\mu = n \cdot p$$

μ \ r	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
.05	.95I	.999	I.000										
.I0	.905	.995	I.000										
.I5	.86I	.990	.999	I.000									
.20	.8I9	.982	.999	I.000									
.25	.779	.974	.998	I.000									
.30	.74I	.963	.996	I.000									
.35	.705	.95I	.994	I.000									
.40	.670	.938	.992	.999	I.000								
.45	.638	.925	.989	.999	I.000								
.50	.607	.9I0	.986	.998	I.000								
.55	.577	.894	.982	.998	I.000								
.60	.549	.878	.977	.997	I.000								
.65	.522	.86I	.972	.996	.999	I.000							
.70	.497	.844	.966	.994	.999	I.000							
.75	.472	.827	.959	.993	.999	I.000							
.80	.449	.809	.953	.99I	.999	I.000							
.85	.427	.79I	.945	.989	.998	I.000							
.90	.407	.772	.937	.987	.998	I.000							
.95	.387	.754	.929	.984	.997	I.000							
I.00	.368	.736	.920	.98I	.996	.999	I.000						
I.I	.333	.699	.900	.974	.995	.999	I.000						
I.2	.30I	.663	.879	.966	.992	.998	I.000						
I.3	.273	.627	.857	.957	.989	.998	I.000						
I.4	.247	.592	.833	.946	.986	.997	.999	I.000					
I.5	.223	.558	.809	.934	.98I	.996	.999	I.000					
I.6	.202	.525	.783	.92I	.976	.994	.999	I.000					
I.7	.I83	.493	.757	.907	.970	.992	.998	I.000					
I.8	.I65	.463	.73I	.89I	.964	.990	.997	.999	I.000				
I.9	.I50	.434	.704	.875	.956	.987	.997	.999	I.000				
2.0	.I35	.406	.677	.857	.947	.983	.995	.999	I.000				
2.2	.III	.355	.623	.8I9	.928	.975	.993	.998	I.000				
2.4	.09I	.308	.570	.779	.904	.964	.988	.997	.999	I.000			
2.6	.074	.267	.5I8	.736	.877	.95I	.983	.995	.999	I.000			
2.8	.06I	.23I	.469	.692	.848	.935	.976	.992	.998	.999	I.000		
3.0	.050	.I99	.423	.647	.8I5	.9I6	.966	.988	.996	.999	I.000		
3.2	.04I	.I7I	.380	.603	.78I	.895	.955	.983	.994	.998	I.000		
3.4	.033	.I47	.340	.558	.744	.87I	.942	.977	.992	.997	.999	I.000	
3.6	.027	.I26	.303	.5I5	.706	.844	.927	.969	.988	.996	.999	I.000	
3.8	.022	.I07	.269	.473	.668	.8I6	.909	.960	.984	.994	.998	.999	I.000
4.0	.0I8	.092	.238	.433	.629	.785	.889	.949	.979	.992	.997	.999	I.000

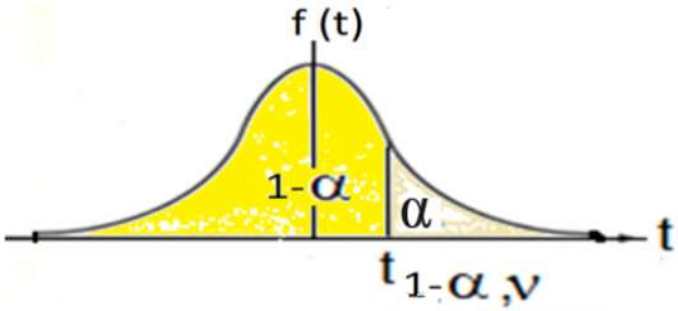
احتمال r أو أقل

Areas under the normal curve

z	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
0·0	·5000	·5040	·5080	·5120	·5160	·5199	·5239	·5279	·5319	·5359
0·1	·5398	·5438	·5478	·5517	·5557	·5596	·5636	·5675	·5714	·5753
0·2	·5793	·5832	·5871	·5910	·5948	·5987	·6026	·6064	·6103	·6141
0·3	·6179	·6217	·6255	·6293	·6331	·6368	·6406	·6443	·6480	·6517
0·4	·6554	·6591	·6628	·6664	·6700	·6736	·6772	·6808	·6844	·6879
0·5	·6915	·6950	·6985	·7019	·7054	·7088	·7123	·7157	·7190	·7224
0·6	·7257	·7291	·7324	·7357	·7389	·7422	·7454	·7486	·7517	·7549
0·7	·7580	·7611	·7642	·7673	·7703	·7734	·7764	·7793	·7823	·7852
0·8	·7881	·7910	·7939	·7967	·7995	·8023	·8051	·8078	·8106	·8133
0·9	·8159	·8186	·8212	·8238	·8264	·8289	·8315	·8340	·8365	·8389
1·0	·8413	·8438	·8461	·8485	·8508	·8531	·8554	·8577	·8599	·8621
1·1	·8643	·8665	·8686	·8708	·8729	·8749	·8770	·8790	·8810	·8830
1·2	·8849	·8869	·8888	·8906	·8925	·8943	·8962	·8980	·8997	·9015
1·3	·9032	·9049	·9066	·9082	·9099	·9115	·9131	·9147	·9162	·9177
1·4	·9192	·9207	·9222	·9236	·9251	·9265	·9279	·9292	·9306	·9319
1·5	·9332	·9345	·9357	·9370	·9382	·9394	·9406	·9418	·9429	·9441
1·6	·9452	·9463	·9474	·9484	·9495	·9505	·9515	·9525	·9535	·9545
1·7	·9554	·9564	·9573	·9582	·9591	·9599	·9608	·9616	·9625	·9633
1·8	·9641	·9648	·9656	·9664	·9671	·9678	·9686	·9693	·9699	·9706
1·9	·9713	·9719	·9726	·9732	·9738	·9744	·9750	·9756	·9761	·9767
2·0	·9772	·9778	·9783	·9788	·9793	·9798	·9803	·9808	·9812	·9817
2·1	·9821	·9826	·9830	·9834	·9838	·9842	·9846	·9850	·9854	·9857
2·2	·9861	·9864	·9868	·9871	·9875	·9878	·9881	·9884	·9887	·9890
2·3	·9893	·9896	·9898	·9901	·9904	·9906	·9909	·9911	·9913	·9916
2·4	·9918	·9920	·9922	·9924	·9927	·9929	·9930	·9932	·9934	·9936
2·5	·9938	·9940	·9941	·9943	·9945	·9946	·9948	·9949	·9951	·9952
2·6	·9953	·9955	·9956	·9957	·9959	·9960	·9961	·9962	·9963	·9964
2·7	·9965	·9966	·9967	·9968	·9969	·9970	·9971	·9972	·9973	·9974
2·8	·9974	·9975	·9976	·9977	·9977	·9978	·9979	·9979	·9980	·9981
2·9	·9981	·9982	·9982	·9983	·9984	·9984	·9985	·9985	·9986	·9986
3·0	·9986	·9987	·9987	·9988	·9988	·9989	·9989	·9989	·9990	·9990
3·1	·9990	·9991	·9991	·9991	·9992	·9992	·9992	·9992	·9993	·9993
3·2	·9993	·9993	·9994	·9994	·9994	·9994	·9994	·9995	·9995	·9995
3·3	·9995	·9995	·9995	·9996	·9996	·9996	·9996	·9996	·9996	·9996
3·4	·9997	·9997	·9997	·9997	·9997	·9997	·9997	·9997	·9997	·9998
3·5	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998
3·6	·9998	·9998	·9998	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999



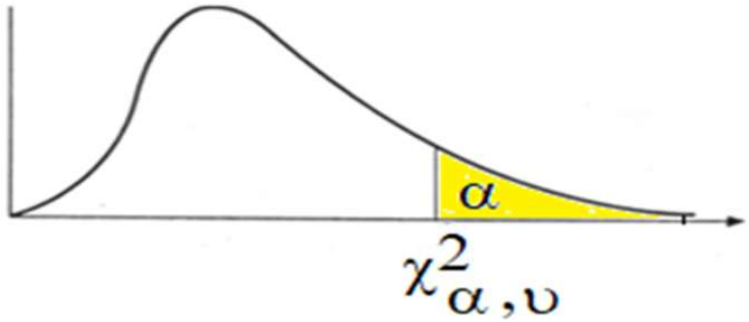
Percentile Values $t_{1-\alpha}$ for Student's t Distribution with ν Degrees of Freedom

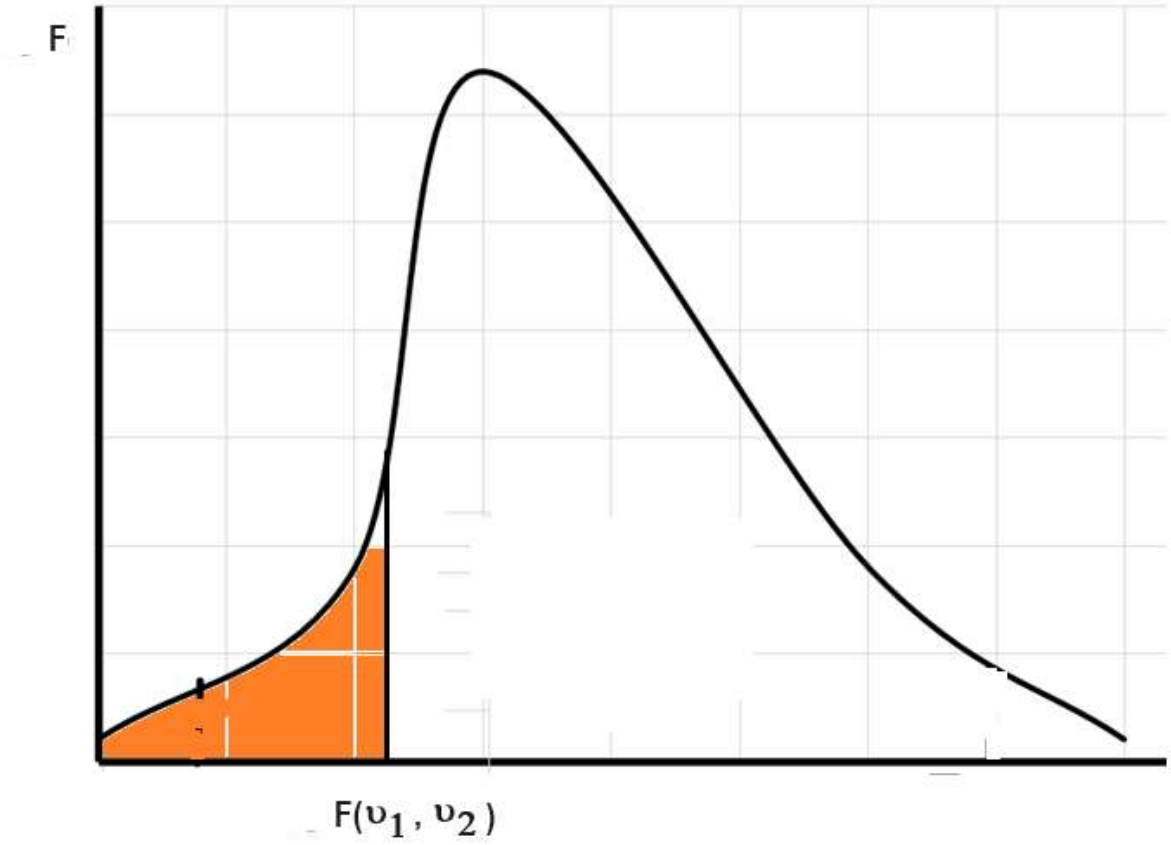


ν	$t_{.55}$	$t_{.60}$	$t_{.70}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	.158	.325	.727	1.000	1.376	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	.142	.289	.617	.816	1.061	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	.137	.277	.584	.765	.978	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	.134	.271	.569	.741	.941	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	.132	.267	.559	.727	.920	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	.131	.265	.553	.718	.906	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	.130	.263	.549	.711	.896	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	.130	.262	.546	.706	.889	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	.129	.261	.543	.703	.883	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	.129	.260	.542	.700	.879	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	.129	.260	.540	.697	.876	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	.128	.259	.539	.695	.873	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06
13	.128	.259	.538	.694	.870	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	.128	.258	.537	.692	.868	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	.128	.258	.536	.691	.866	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	.128	.258	.535	.690	.865	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	.128	.257	.534	.689	.863	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	.127	.257	.534	.688	.862	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	.127	.257	.533	.688	.861	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	.127	.257	.533	.687	.860	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
21	.127	.257	.532	.686	.859	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	.127	.256	.532	.686	.858	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	.127	.256	.532	.685	.858	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	.127	.256	.531	.685	.857	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	.127	.256	.531	.684	.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	.127	.256	.531	.684	.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78
27	.127	.256	.531	.684	.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	.127	.256	.530	.683	.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	.127	.256	.530	.683	.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76
30	.127	.256	.530	.683	.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	.126	.255	.529	.681	.851	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
60	.126	.254	.527	.679	.848	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
120	.126	.254	.526	.677	.845	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62
∞	.126	.253	.524	.674	.842	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58

Percentage points of the χ^2 distribution

α	·995	·99	·975	·95	·50	·20	·10	·05	·025	·01	·005
ν											
1	0·000	0·0002	0·001	0·0039	0·45	1·64	2·71	3·84	5·02	6·63	7·88
2	0·010	0·020	0·051	0·103	1·39	3·22	4·61	5·99	7·38	9·21	10·60
3	0·072	0·115	0·216	0·352	2·37	4·64	6·25	7·81	9·35	11·34	12·84
4	0·207	0·30	0·484	0·71	3·36	5·99	7·78	9·49	11·14	13·28	14·86
5	0·412	0·55	0·831	1·15	4·35	7·29	9·24	11·07	12·83	15·09	16·75
6	0·676	0·87	1·24	1·64	5·35	8·56	10·64	12·59	14·45	16·81	18·55
7	0·989	1·24	1·69	2·17	6·35	9·80	12·02	14·07	16·01	18·48	20·28
8	1·34	1·65	2·18	2·73	7·34	11·03	13·36	15·51	17·53	20·09	21·95
9	1·73	2·09	2·70	3·33	8·34	12·24	14·68	16·92	19·02	21·67	23·59
10	2·16	2·56	3·25	3·94	9·34	13·44	15·99	18·31	20·48	23·21	25·19
11	2·60	3·05	3·82	4·57	10·34	14·63	17·28	19·68	21·92	24·72	26·76
12	3·07	3·57	4·40	5·23	11·34	15·81	18·55	21·03	23·34	26·22	28·30
13	3·57	4·11	5·01	5·89	12·34	16·98	19·81	22·36	24·74	27·69	29·82
14	4·07	4·66	5·63	6·57	13·34	18·15	21·06	23·68	26·12	29·14	31·32
15	4·60	5·23	6·26	7·26	14·34	19·31	22·31	25·00	27·49	30·58	32·80
16	5·14	5·81	6·91	7·96	15·34	20·47	23·54	26·30	28·85	32·00	34·27
17	5·70	6·41	7·56	8·67	16·34	21·61	24·77	27·59	30·19	33·41	35·72
18	6·26	7·02	8·23	9·39	17·34	22·76	25·99	28·87	31·53	34·81	37·16
19	6·84	7·63	8·91	10·12	18·34	23·90	27·20	30·14	32·85	36·19	38·58
20	7·43	8·26	9·59	10·85	19·34	25·04	28·41	31·41	34·17	37·57	40·00
21	8·03	8·90	10·28	11·59	20·34	26·17	29·62	32·67	35·48	38·93	41·40
22	8·64	9·54	10·98	12·34	21·34	27·30	30·81	33·92	36·78	40·29	42·80
23	9·26	10·20	11·69	13·09	23·34	28·43	32·01	35·17	38·08	41·64	44·18
24	9·89	10·86	12·40	13·85	23·34	29·55	33·20	36·42	39·36	42·98	45·56
25	10·52	11·52	13·12	14·61	24·34	30·68	34·38	37·65	40·65	44·31	46·93
26	11·16	12·20	13·84	15·38	25·34	31·79	35·56	38·89	41·92	45·64	48·29
27	11·81	12·88	14·57	16·15	26·34	32·91	36·74	40·11	43·19	46·96	49·64
28	12·46	13·57	15·31	16·93	27·34	34·03	37·92	41·34	44·46	48·28	50·99
29	13·12	14·26	16·05	17·71	28·34	35·14	39·09	42·56	45·72	49·59	52·34
30	13·79	14·95	16·79	18·49	29·34	36·25	40·26	43·77	46·98	50·89	53·67
40	20·71	22·16	24·43	26·51	39·34	47·27	51·81	55·76	59·34	63·69	66·77
50	27·99	29·71	32·36	34·76	49·33	58·16	63·17	67·50	71·41	76·15	79·49
60	35·53	37·48	40·48	43·19	59·33	68·97	74·40	79·08	83·30	88·38	91·95
70	43·28	45·44	48·76	51·74	69·33	79·71	85·53	90·53	95·02	100·43	104·2
80	51·17	53·54	57·15	60·39	79·33	90·41	96·58	101·88	106·63	112·33	116·3
90	59·20	61·75	65·65	69·13	89·33	101·05	107·57	113·15	118·14	124·12	128·3
100	67·33	70·06	74·22	77·93	99·33	111·67	118·50	124·34	129·56	135·81	140·2




F
$F(\upsilon_1, \upsilon_2)$

درجات احتمال متجمعة وقيم $F(\upsilon_1, \upsilon_2)$

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION

υ_2	υ_1 / Cum. Prop.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
1	.0005	$.0^{6}62$	$.0^{5}50$	$.0^{2}38$	$.0^{2}94$	.016	.022	.027	.032	.036	.039	.042	.045	.0005
	.001	$.0^{5}25$	$.0^{2}10$	$.0^{2}69$	.013	.021	.028	.034	.039	.044	.048	.051	.054	.001
	.005	$.0^{4}62$	$.0^{2}51$	.018	.032	.044	.054	.062	.068	.073	.078	.082	.085	.005
	.010	$.0^{3}25$	.010	.029	.047	.062	.073	.082	.089	.095	.100	.104	.107	.010
	.025	$.0^{2}15$	.026	.057	.082	.100	.113	.124	.132	.139	.144	.149	.153	.025
	.05	$.0^{2}62$	.054	.099	.130	.151	.167	.179	.188	.195	.201	.207	.211	.05
	.10	.025	.117	.181	.220	.246	.265	.279	.289	.298	.304	.310	.315	.10
	.25	.172	.389	.494	.553	.591	.617	.637	.650	.661	.670	.680	.684	.25
	.50	1.00	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.03	2.04	2.05	2.07	.50
	.75	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.36	9.41	.75
	.90	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.5	60.7	.90
	.95	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	.95
	.975	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	973	977	.975
	.99	405^{1}	500^{1}	540^{1}	562^{1}	576^{1}	586^{1}	593^{1}	598^{1}	602^{1}	606^{1}	608^{1}	611^{1}	.99
	.995	162^{2}	200^{2}	216^{2}	225^{2}	231^{2}	234^{2}	237^{2}	239^{2}	241^{2}	242^{2}	243^{2}	244^{2}	.995
	.999	406^{2}	500^{3}	540^{3}	562^{3}	576^{3}	586^{3}	593^{3}	598^{3}	602^{3}	606^{3}	609^{3}	611^{3}	.999
	.9995	162^{4}	200^{4}	216^{4}	225^{4}	231^{4}	234^{4}	237^{4}	239^{4}	241^{4}	242^{4}	243^{4}	244^{4}	.9995
2	.0005	$.0^{6}50$	$.0^{3}50$	$.0^{2}42$	.011	.020	.029	.037	.044	.050	.056	.061	.065	.0005
	.001	$.0^{5}20$	$.0^{2}10$	$.0^{2}68$	.016	.027	.037	.046	.054	.061	.067	.072	.077	.001
	.005	$.0^{4}50$	$.0^{2}50$	.020	.038	.055	.069	.081	.091	.099	.106	.112	.118	.005
	.01	$.0^{3}20$	.010	.032	.056	.075	.092	.105	.116	.125	.132	.139	.144	.01
	.025	$.0^{2}13$	.026	.062	.094	.119	.138	.153	.165	.175	.183	.190	.196	.025
	.05	$.0^{2}50$	.053	.105	.144	.173	.194	.211	.224	.235	.244	.251	.257	.05
	.10	.020	.111	.183	.231	.265	.289	.307	.321	.333	.342	.350	.356	.10
	.25	.133	.333	.439	.500	.540	.568	.588	.604	.616	.626	.633	.641	.25
	.50	.667	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.33	1.34	1.35	1.36	.50
	.75	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.39	.75
	.90	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41	.90
	.95	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	.95
	.975	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	.975
	.99	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	.99
	.995	198	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	.995
	.999	998	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	.999
	.9995	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	.9995
3	.0005	$.0^{6}46$	$.0^{3}50$	$.0^{2}44$	.012	.023	.033	.043	.052	.060	.067	.074	.079	.0005
	.001	$.0^{5}19$	$.0^{2}10$	$.0^{2}71$	.018	.030	.042	.053	.063	.072	.079	.086	.093	.001
	.005	$.0^{4}46$	$.0^{2}50$	.021	.041	.060	.077	.092	.104	.115	.124	.132	.138	.005
	.01	$.0^{3}19$	.010	.034	.060	.083	.102	.118	.132	.143	.153	.161	.168	.01
	.025	$.0^{2}12$	.026	.065	.100	.129	.152	.170	.185	.197	.207	.216	.224	.025
	.05	$.0^{2}46$	.052	.108	.152	.185	.210	.230	.246	.259	.270	.279	.287	.05
	.10	.019	.109	.185	.239	.276	.304	.325	.342	.356	.367	.376	.384	.10
	.25	.122	.317	.424	.489	.531	.561	.582	.600	.613	.624	.633	.641	.25
	.50	.585	.881	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	.50
	.75	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.45	.75
	.90	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22	.90
	.95	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	.95
	.075	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.4	14.3	.975
	.99	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1	.99
	.995	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9	43.7	43.5	43.4	.995
	.999	167	149	141	137	135	133	132	131	130	129	129	128	.999
	.9995	266	237	225	218	214	211	209	208	207	206	204	204	.9995

أستاذ المساحة والجيوديسيا
كلية الهندسة / جامعة الأزهر
essamfawaz2001@gmail.com

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.051	.058	062	.066	.069	.072	.074	.077	.078	.080	.081	.083	0005	1
.001	.060	.067	.071	.075	.079	.082	.084	.087	.088	.089	.091	092	.001	
.005	.093	.101	.105	.109	.113	.116	.118	.121	.122	.124	.126	127	.005	
.01	.115	.124	.128	.132	.137	.139	.141	.145	.146	.148	.150	.151	.01	
.025	.161	.170	.175	.180	.184	.187	.189	.193	.194	.196	.198	.199	.025	
.05	.220	.230	.235	.240	.245	.248	.250	.254	.255	.257	.259	.261	.05	
.10	.325	.336	.342	.347	.353	.356	.358	.362	.364	.366	.368	370	10	
.25	.698	.712	.719	.727	.734	.738	.741	.747	.749	.752	.754	.756	.25	
.50	2.09	2.12	2.13	2.15	2.16	2.17	2.17	2.18	2.18	2.19	2.19	2.20	50	
.75	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.74	9.76	9.78	9.80	9.82	9.84	9.85	.75	
.90	61.2	61.7	62.0	62.3	62.5	62.7	62.8	63.0	63.1	63.2	63.3	63.3	.90	
.95	246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254	.95	
.975	985	993	997	100^1	101^1	101^1	101^1	101^1	101^1	102^1	102^1	102^1	.975	
.99	616^1	621^1	623^1	626^1	629^1	630^1	631^1	633^1	634^1	635^1	636^1	637^1	.99	
.995	246^2	248^2	249^2	250^2	251^2	252^2	253^2	253^2	254^2	254^2	254^2	255^2	.995	
.999	616^3	621^3	623^3	626^3	629^3	630^3	631^3	633^3	634^3	635^3	636^3	637^3	.999	
.9995	246^4	248^4	249^4	250^4	251^4	252^4	252^4	253^4	253^4	253^4	254^4	254^4	.9995	
.0005	.076	.088	.094	.101	.108	.113	.116	.122	.124	.127	.130	.132	.0005	2
.001	.088	.100	.107	.114	.121	.126	.129	.135	.137	.140	.143	.145	.001	
.005	.130	.143	.150	.157	.165	.169	.173	.179	.181	.184	.187	.189	.005	
.01	.157	.171	.178	.186	.193	.198	.201	.207	.209	.212	.215	.217	.01	
.025	.210	.224	.232	.239	.247	.251	.255	.261	.263	.266	.269	.271	.025	
.05	.272	.286	.294	.302	.309	.314	.317	.324	.326	.329	.332	.334	.05	
.10	.371	.386	.394	.402	.410	.415	.418	.424	.426	.429	.433	.434	.10	
.25	.657	.672	.680	.689	.697	.702	.705	.711	.713	.716	.719	.721	.25	
.50	1.38	1.39	1.40	1.41	1.42	1.42	1.43	1.43	1.43	1.44	1.44	1.44	.50	
.75	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.45	3.46	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48	.75	
.90	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.48	9.49	9.49	9.49	.90	
.95	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	.95	
.975	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	.975	
.99	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	.99	
.995	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	200	.995	
.999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	.999	
.9995	200^1	200^1	200^1	200^1	200^1	200^1	200^1	200^1	200^1	200^1	200^1	200^1	.9995	
.0005	.093	.109	.117	.127	.136	.143	.147	.156	.158	.162	.166	.169	.0005	3
.001	.107	.123	.132	.142	.152	.158	.162	.171	.173	.177	.181	.184	.001	
.005	.154	.172	.181	.191	.201	.207	.211	.220	.222	.227	.231	.234	.005	
.01	.185	.203	.212	.222	.232	.238	.242	.251	.253	.258	.262	.264	.01	
.025	.241	.259	.269	.279	.289	.295	.299	.308	.310	.314	.318	.321	.025	
.05	.304	.323	.332	.342	.352	.358	.363	.370	.373	.377	.382	.384	.05	
.10	.402	.420	.430	.439	.449	.455	.459	.467	.469	.474	.476	.480	.10	
.25	.658	.675	.684	.693	.702	.708	.711	.719	.721	.724	.728	.730	.25	
.50	1.21	1.23	1.23	1.24	1.25	1.25	1.25	1.26	1.26	1.26	1.27	1.27	.50	
.75	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	.75	
.90	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.14	5.14	5.14	5.13	.90	
.95	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.55	8.54	8.53	8.53	.95	
.975	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	14.0	14.0	13.9	13.9	13.9	13.9	.975	
.99	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.4	26.3	26.2	26.2	26.2	26.1	26.1	.99	
.995	43.1	42.8	42.6	42.5	42.3	42.2	42.1	42.0	42.0	41.9	41.9	41.8	.995	
.999	127	126	126	125	125	125	124	124	124	124	124	123	.999	
.9995	203	201	200	199	199	198	198	197	197	197	196	196	.9995	

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

ν_2	ν_1 / Cum. Prop.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
4	.0005	$.0^{6}44$	$.0^{3}50$	$.0^{2}46$	.013	.024	.036	.047	.057	.066	.075	.082	.089	.0005
	.001	$.0^{5}18$	$.0^{2}10$	$.0^{2}73$	.019	.032	.046	.058	.069	.079	.089	.097	.104	.001
	.005	$.0^{4}44$	$.0^{2}50$	.022	.043	.064	.083	.100	.114	.126	.137	.145	.153	.005
	.01	$.0^{3}18$	.010	.035	.063	.088	.109	.127	.143	.156	.167	.176	.185	.01
	.025	$.0^{2}11$	.026	.066	.104	.135	.161	.181	.198	.212	.224	.234	.243	.025
	.05	$.0^{2}44$	.052	.110	.157	.193	.221	.243	.261	.275	.288	.298	.307	.05
	.10	.018	.108	.187	.243	.284	.314	.338	.356	.371	.384	.394	.403	.10
	.25	.117	.309	.418	.484	.528	.560	.583	.601	.615	.627	.637	.645	.25
	.50	.549	.828	.941	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13	.50
	.75	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	.75
	.90	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90	.90
	.95	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	.95
	.975	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	.975
	.99	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.4	.99
	.995	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1	21.0	20.8	20.7	.995
	.999	74.1	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.5	48.0	47.7	47.4	.999
	.9995	106	87.4	80.1	76.1	73.6	71.9	70.6	69.7	68.9	68.3	67.8	67.4	.9995
5	.0005	$.0^{6}43$	$.0^{3}50$	$.0^{2}47$	.014	.025	.038	.050	.061	.070	.081	.089	.096	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}75$	.019	.034	.048	.062	.074	.085	.095	.104	.112	.001
	.005	$.0^{4}43$	$.0^{2}50$	.022	.045	.067	.087	.105	.120	.134	.146	.156	.165	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.035	.064	.091	.114	.134	.151	.165	.177	.188	.197	.01
	.025	$.0^{2}11$	.025	.067	.107	.140	.167	.189	.208	.223	.236	.248	.257	.025
	.05	$.0^{2}43$	.052	.111	.160	.198	.228	.252	.271	.287	.301	.313	.322	.05
	.10	.017	.108	.188	.247	.290	.322	.347	.367	.383	.397	.408	.418	.10
	.25	.113	.305	.415	.483	.528	.560	.584	.604	.618	.631	.641	.650	.25
	.50	.528	.799	.907	.965	1.00	1.02	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	.50
	.75	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	.75
	.90	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27	.90
	.95	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68	.95
	.975	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	.975
	.99	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89	.99
	.995	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.5	13.4	.995
	.999	47.2	37.1	33.2	31.1	29.7	28.8	28.2	27.6	27.2	26.9	26.6	26.4	.999
	.9995	63.6	49.8	44.4	41.5	39.7	38.5	37.6	36.9	36.4	35.9	35.6	35.2	.9995
6	.0005	$.0^{6}43$	$.0^{3}50$	$.0^{2}47$	.014	.026	.039	.052	.064	.075	.085	.094	.103	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}75$	.020	.035	.050	.064	.078	.090	.101	.111	.119	.001
	.005	$.0^{4}43$	$.0^{2}50$	.022	.045	.069	.090	.109	.126	.140	.153	.164	.174	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.036	.066	.094	.118	.139	.157	.172	.186	.197	.207	.01
	.025	$.0^{2}11$	.025	.068	.109	.143	.172	.195	.215	.231	.246	.258	.268	.025
	.05	$.0^{2}43$	.052	.112	.162	.202	.233	.259	.279	.296	.311	.324	.334	.05
	.10	.017	.107	.189	.249	.294	.327	.354	.375	.392	.406	.418	.429	.10
	.25	.111	.302	.413	.481	.524	.561	.586	.606	.622	.635	.645	.654	.25
	.50	.515	.780	.886	.942	.977	1.00	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.06	.50
	.75	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.77	.75
	.90	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90	.90
	.95	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	.95
	.975	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	.975
	.99	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	.99
	.995	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.2	10.1	10.0	.995
	.999	35.5	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.7	18.4	18.2	18.0	.999
	.9995	46.1	34.8	30.4	28.1	26.6	25.6	24.9	24.3	23.9	23.5	23.2	23 0	.9995

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.105	.125	.135	.147	.159	.166	.172	.183	.186	.191	.196	.200	.0005	4
.001	.121	.141	.152	.163	.176	.183	.188	.200	.202	.208	.213	.217	.001	
.005	.172	.193	.204	.216	.229	.237	.242	.253	.255	.260	.266	.269	.005	
.01	.204	.226	.237	.249	.261	.269	.274	.285	.287	.293	.298	.301	.01	
.025	.263	.284	.296	.308	.320	.327	.332	.342	.346	.351	.356	.359	.025	
.05	.327	.349	.360	.372	.384	.391	.396	.407	.409	.413	.418	.422	.05	
.10	.424	.445	.456	.467	.478	.485	.490	.500	.502	.508	.510	.514	.10	
.25	.664	.683	.692	.702	.712	.718	.722	.731	.733	.737	.740	.743	.25	
.50	1.14	1.15	1.16	1.16	1.17	1.18	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19	1.19	.50	
.75	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	.75	
.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.78	3.77	3.76	3.76	.90	
.95	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63	.95	
.975	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.38	8.36	8.32	8.31	8.29	8.27	8.26	.975	
.99	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.7	13.6	13.6	13.5	13.5	13.5	.99	
.995	20.4	20.2	20.0	19.9	19.8	19.7	19.6	19.5	19.5	19.4	19.4	19.3	.995	
.999	46.8	46.1	45.8	45.4	45.1	44.9	44.7	44.5	44.4	44.3	44.1	44.0	.999	
.9995	66.5	65.5	65.1	64.6	64.1	63.8	63.6	63.2	63.1	62.9	62.7	62.6	.9995	
.0005	.115	.137	.150	.163	.177	.186	.192	.205	.209	.216	.222	.226	.0005	5
.001	.132	.155	.167	.181	.195	.204	.210	.223	.227	.233	.239	.244	.001	
.005	.186	.210	.223	.237	.251	.260	.266	.279	.282	.288	.294	.299	.005	
.01	.219	.244	.257	.270	.285	.293	.299	.312	.315	.322	.328	.331	.01	
.025	.280	.304	.317	.330	.344	.353	.359	.370	.374	.380	.386	.390	.025	
.05	.345	.369	.382	.395	.408	.417	.422	.432	.437	.442	.448	.452	.05	
.10	.440	.463	.476	.488	.501	.508	.514	.524	.527	.532	.538	.541	.10	
.25	.669	.690	.700	.711	.722	.728	.732	.741	.743	.748	.752	.755	.25	
.50	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	.50	
.75	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	.75	
.90	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10	.90	
.95	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.37	4.36	.95	
.975	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.14	6.12	6.08	6.07	6.05	6.03	6.02	.975	
.99	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.20	9.13	9.11	9.08	9.04	9.02	.99	
.995	13.1	12.9	12.8	12.7	12.5	12.5	12.4	12.3	12.3	12.2	12.2	12.1	.995	
.999	25.9	25.4	25.1	24.9	24.6	24.4	24.3	24.1	24.1	23.9	23.8	23.8	.999	
.9995	34.6	33.9	33.5	33.1	32.7	32.5	32.3	32.1	32.0	31.8	31.7	31.6	.9995	
.0005	.123	.148	.162	.177	.193	.203	.210	.225	.229	.236	.244	.249	.0005	6
.001	.141	.166	.180	.195	.211	.222	.229	.243	.247	.255	.262	.267	.001	
.005	.197	.224	.238	.253	.269	.279	.286	.301	.304	.312	.318	.324	.005	
.01	.232	.258	.273	.288	.304	.313	.321	.334	.338	.346	.352	.357	.01	
.025	.293	.320	.334	.349	.364	.375	.381	.394	.398	.405	.412	.415	.025	
.05	.358	.385	.399	.413	.428	.437	.444	.457	.460	.467	.472	.476	.05	
.10	.453	.478	.491	.505	.519	.526	.533	.546	.548	.556	.559	.564	.10	
.25	.675	.696	.707	.718	.729	.736	.741	.751	.753	.758	.762	.765	.25	
.50	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	.50	
.75	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	.75	
.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.73	2.73	2.72	.90	
.95	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.71	3.70	3.69	3.68	3.67	.95	
.975	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.98	4.96	4.92	4.90	4.88	4.86	4.85	.975	
.99	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	7.06	6.99	6.97	6.93	6.90	6.88	.99	
.995	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.17	9.12	9.03	9.00	8.95	8.91	8.88	.995	
.999	17.6	17.1	16.9	16.7	16.4	16.3	16.2	16.0	16.0	15.9	15.8	15.7	.999	
.9995	22.4	21.9	21.7	21.4	21.1	20.9	20.7	20.5	20.4	20.3	20.2	20.1	.9995	

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

ν_2 \ ν_1 Cum. Prop.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
7	.0005	$.0^{6}42$	$.0^{5}50$	$.0^{2}48$	.014	.027	.040	.053	.066	.078	.088	.099	.108	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}76$	.020	.035	.051	.067	.081	.093	.105	.115	.125	.001
	.005	$.0^{4}42$	$.0^{2}50$	.023	.046	.070	.093	.113	.130	.145	.159	.171	.181	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.036	.067	.096	.121	.143	.162	.178	.192	.205	.216	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.068	.110	.146	.176	.200	.221	.238	.253	.266	.277	.025
	.05	$.0^{2}42$	.052	.113	.164	.205	.238	.264	.286	.304	.319	.332	.343	.05
	.10	.017	.107	.190	.251	.297	.332	.359	.381	.399	.414	.427	.438	.10
	.25	.110	.300	.412	.481	.528	.562	.588	.608	.624	.637	.649	.658	.25
	.50	.506	.767	.871	.926	.960	.983	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.04	.50
	.75	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.69	1.68	.75
	.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67	.90
	.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	.95
	.975	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	.975
	.99	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	.99
	.995	16.2	12.4	10.9	10.0	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.27	8.18	.995
	.999	29.2	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.3	14.1	13.9	13.7	.999
	.9995	37.0	27.2	23.5	21.4	20.2	19.3	18.7	18.2	17.8	17.5	17.2	17.0	.9995
8	.0005	$.0^{6}42$	$.0^{5}50$	$.0^{2}48$	.014	.027	.041	.055	.068	.081	.092	.102	.112	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}76$	.020	.036	.053	.068	.083	.096	.109	.120	.130	.001
	.005	$.0^{4}42$	$.0^{2}50$	.027	.047	.072	.095	.115	.133	.149	.164	.176	.187	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.036	.068	.097	.123	.146	.166	.183	.198	.211	.222	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.069	.111	.148	.179	.204	.226	.244	.259	.273	.285	.025
	.05	$.0^{2}42$	.052	.113	.166	.208	.241	.268	.291	.310	.326	.339	.351	.05
	.10	.017	.107	.190	.253	.299	.335	.363	.386	.405	.421	.435	.445	.10
	.25	.109	.298	.411	.481	.529	.563	.589	.610	.627	.640	.654	.661	.25
	.50	.499	.757	.860	.915	.948	.971	.988	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	.50
	.75	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62	.75
	.90	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50	.90
	.95	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	.95
	.975	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	.975
	.99	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	.99
	.995	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.10	7.01	.995
	.999	25.4	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.8	11.5	11.4	11.2	.999
	.9995	31.6	22.8	19.4	17.6	16.4	15.7	15.1	14.6	14.3	14.0	13.8	13.6	.9995
9	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{5}50$	$.0^{2}48$	.015	.027	.042	.056	.070	.083	.094	.105	.115	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}77$	.021	.037	.054	.070	.085	.099	.112	.123	.134	.001
	.005	$.0^{4}42$	$.0^{2}50$	.023	.047	.073	.096	.117	.136	.153	.168	.181	.192	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.037	.068	.098	.125	.149	.169	.187	.202	.216	.228	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.069	.112	.150	.181	.207	.230	.248	.265	.279	.291	.025
	.05	$.0^{2}40$	.052	.113	.167	.210	.244	.272	.296	.315	.331	.345	.358	.05
	.10	.017	.107	.191	.254	.302	.338	.367	.390	.410	.426	.441	.452	.10
	.25	.108	.297	.410	.480	.529	.564	.591	.612	.629	.643	.654	.664	.25
	.50	.494	.749	.852	.906	.939	.962	.978	.990	1.00	1.01	1.01	1.02	.50
	.75	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58	.75
	.90	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38	.90
	.95	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	.95
	.975	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	.975
	.99	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	.99
	.995	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.31	6.23	.995
	.999	22.9	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	10.1	9.89	9.71	9.57	.999
	.9995	28.0	19.9	16.8	15.1	14.1	13.3	12.8	12.4	12.1	11.8	11.6	11.4	.9995

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.130	.157	.172	.188	.206	.217	.225	.242	.246	.255	.263	.268	.0005	7
.001	.148	.176	.191	.208	.225	.237	.245	.261	.266	.274	.282	.288	.001	
.005	.206	.235	.251	.267	.285	.296	.304	.319	.324	.332	.340	.345	.005	
.01	.241	.270	.286	.303	.320	.331	.339	.355	.358	.366	.373	.379	.01	
.025	.304	.333	.348	.364	.381	.392	.399	.413	.418	.426	.433	.437	.025	
.05	.369	.398	.413	.428	.445	.455	.461	.476	.479	.485	.493	.498	.05	
.10	.463	.491	.504	.519	.534	.543	.550	.562	.566	.571	.578	.582	.10	
.25	.679	.702	.713	.725	.737	.745	.749	.760	.762	.767	.772	.775	.25	
.50	1.05	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	.50	
.75	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	.75	
.90	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.52	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47	.90	
.95	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.27	3.25	3.24	3.23	.95	
.975	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.28	4.25	4.21	4.20	4.18	4.16	4.14	.975	
.99	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.82	5.75	5.74	5.70	5.67	5.65	.99	
.995	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.35	7.31	7.22	7.19	7.15	7.10	7.08	.995	
.999	13.3	12.9	12.7	12.5	12.3	12.2	12.1	11.9	11.9	11.8	11.7	11.7	.999	
.9995	16.5	16.0	15.7	15.5	15.2	15.1	15.0	14.7	14.7	14.6	14.5	14.4	.9995	
.0005	.136	.164	.181	.198	.218	.230	.239	.257	.262	.271	.281	.287	.0005	8
.001	.155	.184	.200	.218	.238	.250	.259	.277	.282	.292	.300	.306	.001	
.005	.214	.244	.261	.279	.299	.311	.319	.337	.341	.351	.358	.364	.005	
.01	.250	.281	.297	.315	.334	.346	.354	.372	.376	.385	.392	.398	.01	
.025	.313	.343	.360	.377	.395	.407	.415	.431	.435	.442	.450	.456	.025	
.05	.379	.409	.425	.441	.459	.469	.477	.493	.496	.505	.510	.516	.05	
.10	.472	.500	.515	.531	.547	.556	.563	.578	.581	.588	.595	.599	.10	
.25	.684	.707	.718	.730	.743	.751	.756	.767	.769	.775	.780	.783	.25	
.50	1.04	1.05	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09	.50	
.75	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.59	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	.75	
.90	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.32	2.31	2.30	2.29	.90	
.95	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.97	2.95	2.94	2.93	.95	
.975	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.81	3.78	3.74	3.73	3.70	3.68	3.67	.975	
.99	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.07	5.03	4.96	4.95	4.91	4.88	4.86	.99	
.995	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.22	6.18	6.09	6.06	6.02	5.98	5.95	.995	
.999	10.8	10.5	10.3	10.1	9.92	9.80	9.73	9.57	9.54	9.46	9.39	9.34	.999	
.9995	13.1	12.7	12.5	12.2	12.0	11.8	11.8	11.6	11.5	11.4	11.4	11.3	.9995	
.0005	.141	.171	.188	.207	.228	.242	.251	.270	.276	.287	.297	.303	.0005	9
.001	.160	.191	.208	.228	.249	.262	.271	.291	.296	.307	.316	.323	.001	
.005	.220	.253	.271	.290	.310	.324	.332	.351	.356	.366	.376	.382	.005	
.01	.257	.289	.307	.326	.346	.358	.368	.386	.391	.400	.410	.415	.01	
.025	.320	.352	.370	.388	.408	.420	.428	.446	.450	.459	.467	.473	.025	
.05	.386	.418	.435	.452	.471	.483	.490	.508	.510	.518	.526	.532	.05	
.10	.479	.509	.525	.541	.558	.568	.575	.588	.594	.602	.610	.613	.10	
.25	.687	.711	.723	.736	.749	.757	.762	.773	.776	.782	.787	.791	.25	
.50	1.03	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	.50	
.75	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	.75	
.90	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	.90	
.95	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.76	2.75	2.73	2.72	2.71	.95	
.975	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.47	3.45	3.40	3.39	3.37	3.35	3.33	.975	
.99	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.48	4.42	4.40	4.36	4.33	4.31	.99	
.995	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.45	5.41	5.32	5.30	5.26	5.21	5.19	.995	
.999	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.26	8.19	8.04	8.00	7.93	7.86	7.81	.999	
.9995	11.0	10.6	10.4	10.2	9.94	9.80	9.71	9.53	9.49	9.40	9.32	9.26	.9995	

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

ν_2	V_1 / Cum. Prop.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
10	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}49$	.015	.028	.043	.057	.071	.085	.097	.108	.119	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{3}10$	$.0^{2}77$	.021	.037	.054	.071	.087	.101	.114	.126	.137	.001
	.005	$.0^{4}41$	$.0^{2}50$	.023	.048	.073	.098	.119	.139	.156	.171	.185	.197	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.037	.069	.100	.127	.151	.172	.190	.206	.220	.233	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.069	.113	.151	.183	.210	.233	.252	.269	.283	.296	.025
	.05	$.0^{2}41$	.052	.114	.168	.211	.246	.275	.299	.319	.336	.351	.363	.05
	.10	.017	.106	.191	.255	.303	.340	.370	.394	.414	.430	.444	.457	.10
	.25	.107	.296	.409	.480	.529	.565	.592	.613	.631	.645	.657	.667	.25
	.50	.490	.743	.845	.899	.932	.954	.971	.983	.992	1.00	1.01	1.01	.50
	.75	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	.75
	.90	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28	.90
	.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	.95
	.975	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	.975
	.99	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4. 1	.99
	.995	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.75	5.66	.995
	.999	21.0	14.9	12.6	11.3	10.5	9.92	9.52	9.20	8.96	8.75	8.58	8.44	.999
	.9995	25.5	17.9	15.0	13.4	12.4	11.8	11.3	10.9	10.6	10.3	10.1	9.93	.9995
11	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}49$	.015	.028	.043	.058	.072	.086	.099	.111	.121	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{3}10$	$.0^{2}78$	.021	.038	.055	.072	.088	.103	.116	.129	.140	.001
	.005	$.0^{4}40$	$.0^{2}50$	.023	.048	.074	.099	.121	.141	.158	.174	.188	.200	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.069	.100	.128	.153	.175	.193	.210	.224	.237	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.069	.114	.152	.185	.212	.236	.256	.273	.288	.301	.025
	.05	$.0^{2}41$	.052	.114	.168	.212	.248	.278	.302	.323	.340	.355	.368	.05
	.10	.017	.106	.192	.256	.305	.342	.373	.397	.417	.435	.448	.461	.10
	.25	.107	.295	.408	.481	.529	.565	.592	.614	.633	.645	.658	.667	.25
	.50	.486	.739	.840	.893	.926	.948	.964	.977	.986	.994	1.00	1.01	.50
	.75	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.52	1.51	.75
	.90	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	.90
	.95	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	.95
	.975	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	.975
	.99	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	.99
	.995	12.2	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.32	5.24	.995
	.999	19.7	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.76	7.62	.999
	.9995	23.6	16.4	13.6	12.2	11.2	10.6	10.1	9.76	9.48	9.24	9.04	8.88	.9995
12	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}49$	.015	.028	.044	.058	.073	.087	.101	.113	.124	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{3}10$	$.0^{2}78$	.021	.038	.056	.073	.089	.104	.118	.131	.143	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.023	.048	.075	.100	.122	.143	.161	.177	.191	.204	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.070	.101	.130	.155	.176	.196	.212	.227	.241	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.070	.114	.153	.186	.214	.238	.259	.276	.292	.305	.025
	.05	$.0^{2}41$	.052	.114	.169	.214	.250	.280	.305	.325	.343	.358	.372	.05
	.10	.016	.106	.192	.257	.306	.344	.375	.400	.420	.438	.452	.466	.10
	.25	.106	.295	.408	.480	.530	.566	.594	.616	.633	.649	.662	.671	.25
	.50	.484	.735	.835	.888	.921	.943	.959	.972	.981	.989	.995	1.00	.50
	.75	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	.75
	.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15	.90
	.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2 72	2.69	.95
	.975	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3 37	3.32	3.28	.975
	.99	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	.99
	.995	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5 09	4.99	4.91	.995
	.999	18.6	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.14	7.01	.999
	.9995	22.2	15.3	12.7	11.2	10.4	9.74	9.28	8.94	8.66	8.43	8.24	8 08	.9995

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

ν_1 / Cum. Prop.	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_1
.0005	.145	.177	195	.215	.238	.251	.262	.282	.288	.299	.311	.319	.0005	10
.001	.164	.197	216	236	258	.272	.282	303	309	.321	331	.338	.001	
.005	.226	.260	279	299	321	.334	.344	365	370	380	.391	.397	.005	
.01	.263	.297	.316	.336	357	.370	.380	400	.405	.415	.424	.431	.01	
.025	.327	360	.379	398	.419	.431	.441	459	.464	.474	.483	.488	.025	
05	.393	.426	444	.462	481	.493	.502	518	.523	532	.541	546	.05	
.10	.486	.516	.532	549	567	.578	586	.602	.605	.614	.621	625	.10	
.25	.691	.714	.727	.740	.754	.762	.767	.779	.782	.788	793	.797	.25	
.50	1.02	1 03	1.04	1 05	1.05	1 06	1.06	1.06	1.06	1.07	1 07	1.07	.50	
.75	1· 53	1 52	1,52	1.51	1 51	1.50	1 50	1 49	1.49	1.49	1 48	1 48	.75	
.90	2 24	2.20	2 18	2.16	2.13	2.12	2.11	2.09	2 08	2.07	2.06	2.06	.90	
.95	2 85	2.77	2.74	2 70	2 66	2.64	2.62	2.59	2.58	2.56	2 55	2.54	.95	
.975	3 52	3.42	3.37	3 31	3 26	3.22	3.20	3.15	3 14	3.12	3 09	3.08	.975	
.99	4 56	4 41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.08	4.01	4.00	3.96	3.93	3.91	.99	
.995	5 47	5.27	5.17	5 07	4 97	4.90	4 86	4.77	4.75	4 71	4.67	4 64	.995	
.999	8 13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.19	7 12	6.98	6.94	6.87	6.81	6 76	.999	
.9995	9.56	9.16	8.96	8.75	8 54	8.42	8 33	8.16	8.12	8.04	7.96	7.90	.9995	
.0005	.148	.182	.201	.222	.246	261	.271	.293	.299	.312	.324	.331	.0005	11
.001	.168	.202	.222	.243	266	282	292	.313	.320	.332	.343	.353	.001	
.005	.231	.266	.286	.308	.330	.345	.355	.376	382	.394	.403	.412	.005	
.01	.268	.304	.324	.344	.366	.380	.391	.412	.417	.427	.439	.444	.01	
.025	.332	.368	.386	.407	.429	.442	.450	472	.476	.485	495	.503	.025	
.05	.398	.433	.452	.469	.490	.503	.513	529	.535	543	.552	559	.05	
.10	.490	.524	.541	.559	578	588	595	.614	617	.625	.633	.637	.10	
.25	.694	.719	.730	.744	.758	.767	.773	.780	.788	.794	.799	.803	.25	
.50	1.02	1.03	1.03	1.04	1.05	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	.50	
.75	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.47	1.46	1.46	1.46	1.45	1.45	.75	
.90	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	2.00	1.99	1.98	1.97	.90	
.95	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.46	2.45	2.43	2.42	2.40	.95	
.975	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.03	3.00	2.96	2.94	2.92	2.90	2.88	.975	
.99	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.78	3.71	3.69	3.66	3.62	3.60	.99	
.995	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.49	4.45	4.36	4.34	4.29	4.25	4.23	.995	
.999	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.41	6.35	6.21	6.17	6.10	6.04	6.00	.999	
.9995	8.52	8.14	7.94	7.75	7.55	7.43	7.35	7.18	7.14	7.06	6.98	6.93	.9995	
.0005	.152	.186	.206	.228	.253	.269	.280	.305	.311	.323	.337	.345	.0005	12
.001	.172	.207	.228	.250	.275	.291	.302	.326	.332	.344	.357	.365	.001	
.005	.235	.272	.292	.315	.339	.355	.365	.388	.393	.405	.417	.424	.005	
.01	.273	.310	.330	.352	.375	.391	.401	.422	.428	.441	.450	.458	.01	
.025	.337	.374	.394	.416	.437	.450	.461	.481	.487	.498	.508	514	.025	
.05	.404	.439	.458	.478	.499	.513	.522	.541	.545	.556	.565	.571	.05	
.10	.496	.528	.546	.564	.583	.595	.604	.621	.625	.633	.641	.647	.10	
.25	.695	.721	.734	.748	.762	.771	.777	.789	.792	.799	.804	.808	.25	
.50	1.01	1 02	1.03	1.03	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05	1.06	1.06	.50	
.75	1.48	1 47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.44	1.43	1.43	1.43	1.42	1.42	.75	
.90	2.11	2.06	2.04	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	.90	
.95	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.35	2.34	2.32	2.31	2.30	.95	
.975	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.87	2.85	2.80	2.79	2.76	2.74	2.72	.975	
.99	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.54	3.47	3.45	3.41	3.38	3.36	.99	
.995	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.17	4.12	4.04	4.01	3.97	3.93	3.90	.995	
.999	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.83	5.76	5.63	5.59	5.52	5.46	5.42	.999	
.9995	7.74	7.37	7.18	7.00	6.80	6.68	6.61	6.45	6.41	6.33	6.25	6.20	.9995	

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

ν_2	ν_1 / Cum. Prop.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
15	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}49$	.015	.029	.045	.061	.076	.091	.105	.117	.129	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.021	.039	.057	.075	.092	.108	.123	.137	.149	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.023	.049	.076	.102	.125	.147	.166	.183	.198	.212	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.070	.103	.132	.158	.181	.202	.219	.235	.249	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.070	.116	.156	.190	.219	.244	.265	.284	.300	.315	.025
	.05	$.0^{2}41$	.051	.115	.170	.216	.254	.285	.311	.333	.351	.368	.382	.05
	.10	.016	.106	.192	.258	.309	.348	.380	.406	.427	.446	.461	.475	.10
	.25	.105	.293	.407	.480	.531	.568	.596	.618	.637	.652	.667	.676	.25
	.50	.478	.726	.826	.878	.911	.933	.948	.960	.970	.977	.984	.989	.50
	.75	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.44	.75
	.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	.90
	.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	.95
	.975	6.20	4.76	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	.975
	.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	.99
	.995	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.33	4.25	.995
	.999	16.6	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.93	5.81	.999
	.9995	19.5	13.2	10.8	9.48	8.66	8.10	7.68	7.36	7.11	6.91	6.75	6.60	.9995
20	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}50$	.015	.029	.046	.063	.079	.094	.109	.123	.136	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.022	.039	.058	.077	.095	.112	.128	.143	.156	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.023	.050	.077	.104	.129	.151	.171	.190	.206	.221	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.071	.105	.135	.162	.187	.208	.227	.244	.259	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.071	.117	.158	.193	.224	.250	.273	.292	.310	.325	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.115	.172	.219	.258	.290	.318	.340	.360	.377	.393	.05
	.10	.016	.106	.193	.260	.312	.353	.385	.412	.435	.454	.472	.485	.10
	.25	.104	.292	.407	.480	.531	.569	.598	.622	.641	.656	.671	.681	.25
	.50	.472	.718	.816	.868	.900	.922	.938	.950	.959	.966	.972	.977	.50
	.75	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	.75
	.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.91	1.89	.90
	.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	.95
	.975	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	.975
	.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	.99
	.995	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.76	3.68	.995
	.999	14.8	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.94	4.82	.999
	.9995	17.2	11.4	9.20	8.02	7.28	6.76	6.38	6.08	5.85	5.66	5.51	5.38	.9995
24	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}50$	.015	.030	.046	.064	.080	.096	.112	.126	.139	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.022	.040	.059	.079	.097	.115	.131	.146	.160	.001
	.005	$.0^{4}40$	$.0^{2}50$	.023	.050	.078	.106	.131	.154	.175	.193	.210	.226	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.072	.106	.137	.165	.189	.211	.231	.249	.264	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.071	.117	.159	.195	.227	.253	.277	.297	.315	.331	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.116	.173	.221	.260	.293	.321	.345	.365	.383	.399	.05
	.10	.016	.106	.193	.261	.313	.355	.388	.416	.439	.459	.476	.491	.10
	.25	.104	.291	.406	.480	.532	.570	.600	.623	.643	.659	.671	.684	.25
	.50	.469	.714	.812	.863	.895	.917	.932	.944	.953	.961	.967	.972	.50
	.75	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.37	1.36	.75
	.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83	.90
	.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18	.95
	.975	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	.975
	.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	.99
	.995	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.50	3.42	.995
	.999	14.0	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.50	4.39	.999
	.9995	16.2	10.6	8.52	7.39	6.68	6.18	5.82	5.54	5.31	5.13	4.98	4.85	.9995

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.159	.197	.220	.244	.272	.290	.303	.330	.339	.353	.368	.377	.0005	15
.001	.181	.219	.242	.266	.294	.313	.325	.352	.360	.375	.388	.398	.001	
.005	.246	.286	.308	.333	.360	.377	.389	.415	.422	.435	.448	.457	.005	
.01	.284	.324	.346	.370	.397	.413	.425	.450	.456	.469	.483	.490	.01	
.025	.349	.389	.410	.433	.458	.474	.485	.508	.514	.526	.538	.546	.025	
.05	.416	.454	.474	.496	.519	.535	.545	.565	.571	.581	.592	.600	.05	
.10	.507	.542	.561	.581	.602	.614	.624	.641	.647	.658	.667	.672	.10	
.25	.701	.728	.742	.757	.772	.782	.788	.802	.805	.812	.818	.822	.25	
.50	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05	.50	
.75	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	.75	
.90	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76	.90	
.95	2.40	2.33	2.39	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	.95	
.975	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.55	2.52	2.47	2.46	2.44	2.41	2.40	.975	
.99	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	2.98	2.96	2.92	2.89	2.87	.99	
.995	4.07	3.88	3.79	3.69	3.59	3.52	3.48	3.39	3.37	3.33	3.29	3.26	.995	
.999	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.70	4.64	4.51	4.47	4.41	4.35	4.31	.999	
.9995	6.27	5.93	5.75	5.58	5.40	5.29	5.21	5.06	5.02	4.94	4.87	4.83	.9995	
.0005	.169	.211	.235	.263	.295	.316	.331	.364	.375	.391	.408	.422	.0005	20
.001	.191	.233	.258	.286	.318	.339	.354	.386	.395	.413	.429	.441	.001	
.005	.258	.301	.327	.354	.385	.405	.419	.448	.457	.474	.490	.500	.005	
.01	.297	.340	.365	.392	.422	.441	.455	.483	.491	.508	.521	.532	.01	
.025	.363	.406	.430	.456	.484	.503	.514	.541	.548	.562	.575	.585	.025	
.05	.430	.471	.493	.518	.544	.562	.572	.595	.603	.617	.629	.637	.05	
.10	.520	.557	.578	.600	.623	.637	.648	.671	.675	.685	.694	.704	.10	
.25	.708	.736	.751	.767	.784	.794	.801	.816	.820	.827	.835	.840	.25	
.50	.989	1.00	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	.50	
.75	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	.75	
.90	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	.90	
.95	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	.95	
.975	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.25	2.22	2.17	2.16	2.13	2.10	2.09	.975	
.99	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42	.99	
.995	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.96	2.92	2.83	2.81	2.76	2.72	2.69	.995	
.999	4.56	4.29	4.15	4.01	3.86	3.77	3.70	3.58	3.54	3.48	3.42	3.38	.999	
.9995	5.07	4.75	4.58	4.42	4.24	4.15	4.07	3.93	3.90	3.82	3.75	3.70	.9995	
.0005	.174	.218	.244	.274	.309	.331	.349	.384	.395	.416	.434	.449	.0005	24
.001	.196	.241	.268	.298	.332	.354	.371	.405	.417	.437	.455	.469	.001	
.005	.264	.310	.337	.367	.400	.422	.437	.469	.479	.498	.515	.527	.005	
.01	.304	.350	.376	.405	.437	.459	.473	.505	.513	.529	.546	.558	.01	
.025	.370	.415	.441	.468	.498	.518	.531	.562	.568	.585	.599	.610	.025	
.05	.437	.480	.504	.530	.558	.575	.588	.613	.622	.637	.649	.659	.05	
.10	.527	.566	.588	.611	.635	.651	.662	.685	.691	.704	.715	.723	.10	
.25	.712	.741	.757	.773	.791	.802	.809	.825	.829	.837	.844	.850	.25	
.50	.983	.994	1.00	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	.50	
.75	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27	1.27	1.26	.75	
.90	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.90	
.95	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.95	
.975	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.11	2.08	2.02	2.01	1.98	1.95	1.94	.975	
.99	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21	.99	
.995	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.70	2.66	2.57	2.55	2.50	2.46	2.43	.995	
.999	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.35	3.29	3.16	3.14	3.07	3.01	2.97	.999	
.9995	4.55	4.25	4.09	3.93	3.76	3.66	3.59	3.44	3.41	3.33	3.27	3.22	.9995	

أستاذ المساحة والجيوديسيا
كلية الهندسة / جامعة الأزهر
essamfawaz2001@gmail.com

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

ν_2	Cum. Prop \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
30	.0005	$0^{6}40$	$0^{5}50$	$0^{2}50$	015	030	047	065	082	098	114	.129	.143	0005
	.001	$0^{5}16$	$0^{2}10$	$0^{2}80$	022	040	060	080	099	117	134	150	164	001
	.005	$0^{4}40$	$0^{2}50$	.024	050	079	107	133	156	178	197	.215	231	005
	.01	$0^{3}16$	010	.038	.072	.107	138	167	192	215	235	.254	270	01
	.025	$0^{2}10$	025	071	.118	.161	.197	229	.257	281	302	.321	337	025
	.05	$0^{2}40$	051	116	.174	.222	.263	.296	.325	349	370	.389	406	05
	.10	016	106	193	.262	.315	.357	.391	.420	.443	.464	.481	497	10
	.25	.103	.290	.406	480	.532	.571	.601	625	.645	661	.676	688	.25
	.50	.466	709	807	.858	.890	912	.927	.939	.948	955	.961	966	50
	.75	1 38	1 45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1 36	1 35	1 35	1.34	75
	.90	2 88	2 49	2 28	2.14	2.05	1 98	1 93	1 88	1.85	1.82	1 79	1.77	.90
	.95	4.17	3 32	2 92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2 21	2.16	2 13	2.09	.95
	.975	5 57	4 18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2 46	2.41	.975
	.99	7 56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3 30	3.17	3 07	2.98	2 91	2.84	.99
	.995	9 18	6 35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3 25	3.18	.995
	.999	13 3	8.77	7.05	6 12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39	4.24	4.11	4.00	.999
	.9995	15.2	9.90	7.90	6.82	6.14	5.66	5.31	5.04	4.82	4.65	4.51	4.38	.9995
40	.0005	$0^{6}40$	$0^{5}50$	$0^{2}50$	.016	.030	.048	.066	.084	.100	.117	.132	.147	.0005
	.001	$0^{5}16$	$0^{2}10$	$0^{2}80$	.022	.042	.061	.081	.101	.119	.137	.153	.169	001
	.005	$0^{4}40$	$0^{2}50$	.024	.051	.080	.108	.135	.159	.181	201	.220	.237	005
	.01	$0^{3}16$	010	.038	.073	.108	.140	.169	.195	.219	240	.259	.276	01
	.025	$0^{3}99$	025	071	.119	.162	.199	.232	.260	.285	.307	.327	.344	025
	.05	$0^{2}40$	.051	.116	175	224	265	.299	.329	.354	.376	.395	.412	.05
	.10	016	106	.194	.263	317	.360	394	.424	.448	469	.488	.504	.10
	.25	103	290	.405	.480	.533	572	.603	.627	.647	664	.680	.691	.25
	.50	463	.705	.802	.854	.885	.907	.922	.934	.943	.950	.956	.961	.50
	.75	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1 32	1.31	.75
	.90	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.73	1.71	.90
	.95	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2 00	.95
	.975	5.42	4 05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2 33	2.29	.975
	.99	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2 73	2.66	99
	.995	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	3 03	2 95	995
	.999	12 6	8 25	6 60	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.75	3 64	.999
	.9995	14 4	9.25	7.33	6.30	5.64	5.19	4.85	4.59	4.38	4.21	4.07	3.95	9995
60	.0005	$0^{6}40$	$0^{5}50$	$0^{2}51$	.016	.031	.048	.067	.085	.103	.120	.136	.152	.0005
	.001	$0^{5}16$	$0^{2}10$	$0^{2}80$	022	041	062	083	.103	.122	.140	.157	.174	001
	.005	$0^{4}40$	$0^{2}50$	024	.051	.081	.110	137	.162	.185	206	.225	243	005
	.01	$0^{3}16$	.010	.038	.073	109	142	.172	199	.223	.245	.265	283	01
	.025	$0^{3}99$	.025	.071	.120	.163	202	235	264	290	.313	.333	351	025
	.05	$0^{2}40$	.051	116	.176	226	267	.303	333	359	.382	.402	419	05
	.10	016	.106	.194	.264	.318	.362	.398	428	453	.475	.493	510	10
	.25	.102	.289	405	.480	.534	573	.604	.629	650	667	.680	695	25
	.50	.461	.701	798	.849	.880	901	.917	.928	937	.945	.951	.956	50
	.75	1 35	1.42	1.41	1.38	1 37	1.35	1.33	1 32	1.31	1 30	1.29	1 29	.75
	.90	2 79	2.39	2 18	2.04	1.95	1 87	1 82	1 77	1 74	1.71	1.68	1.66	90
	.95	4 00	3 15	2.76	2.53	2.37	2 25	2 17	2.10	2 04	1.99	1 95	1 92	95
	.975	5 29	3.93	3 34	3.01	2 79	2 63	2.51	2.41	2 33	2 27	2 22	2 17	975
	.99	7.08	4 98	4 13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2 72	2 63	2.56	2 50	99
	.995	8.49	5 80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3 13	3 01	2 90	2 82	2 74	.995
	.999	12 0	7 76	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3 87	3 69	3 54	3 43	3 31	.999
	.9995	13.6	8.65	6.81	5.82	5.20	4.76	4.44	4 18	3 98	3.82	3 69	3 57	9995

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	179	226	254	287	325	350	369	410	420	444	467	483	0005	30
.001	202	250	278	311	348	373	391	431	442	465	488	503	001	
.005	271	320	349	381	416	441	457	495	504	524	543	559	005	
.01	311	360	388	419	454	476	493	529	538	559	575	590	01	
.025	378	426	453	482	515	535	551	585	592	610	625	639	025	
.05	445	490	516	543	573	592	606	637	644	658	676	685	05	
.10	534	575	598	623	649	667	678	704	710	725	735	746	10	
.25	716	746	763	780	798	810	818	835	839	848	856	862	25	
.50	978	989	994	1.00	1.01	1.01	1 01	1 02	1 02	1 02	1 02	1 02	50	
.75	1.32	1.30	1 29	1 28	1.27	1 26	1 26	1 25	1 24	1 24	1 23	1 23	.75	
.90	1 72	1 67	1.64	1.61	1 57	1 55	1 54	1 51	1 50	1 48	1 47	1 46	90	
.95	2 01	1 93	1 89	1.84	1.79	1 76	1 74	1 70	1 68	1 66	1 64	1 62	95	
.975	2 31	2.20	2.14	2.07	2 01	1.97	1 94	1 88	1 87	1.84	1 81	1 79	.975	
.99	2 70	2 55	2.47	2.39	2 30	2 25	2 21	2 13	2 11	2 07	2 03	2 01	99	
.995	3 01	2 82	2.73	2.63	2.52	2.46	2 42	2 32	2 30	2 25	2 21	2.18	.995	
.999	3 75	3.49	3.36	3.22	3.07	2 98	2 92	2 79	2 76	2 69	2.63	2.59	999	
.9995	4.10	3.80	3.65	3.48	3.32	3 22	3.15	3.00	2 97	2.89	2.82	2.78	9995	
.0005	.185	.236	.266	.301	.343	.373	.393	.441	453	480	504	.525	0005	40
.001	.209	.259	.290	326	367	.396	.415	.461	473	500	524	.545	001	
.005	279	.331	362	.396	.436	.463	481	.524	534	559	581	.599	005	
.01	.319	.371	401	.435	.473	.498	516	.556	567	592	.613	.628	01	
.025	.387	.437	.466	498	.533	.556	.573	610	620	641	662	.674	025	
.05	.454	502	529	558	.591	.613	.627	.658	669	685	704	.717	05	
.10	.542	585	.609	.636	.664	683	.696	.724	.731	.747	.762	.772	.10	
.25	.720	.752	769	787	.806	.819	.828	846	851	.861	.870	.877	.25	
.50	.972	.983	989	.994	1 00	1.00	1.01	1 01	1 01	1 01	1 02	1.02	.50	
.75	1 30	1.28	1 26	1.25	1.24	1.23	1.22	1 21	1 21	1.20	1.19	1.19	.75	
.90	1 66	1 61	1.57	1 54	1.51	1.48	1.47	1 43	1 42	1 41	1.39	1.38	.90	
.95	1 92	1 84	1 79	1 74	1 69	1.66	1 64	1.59	1 58	1 55	1 53	1.51	95	
.975	2.18	2 07	2 01	1 94	1.88	1.83	1 80	1.74	1.72	1 69	1.66	1.64	975	
.99	2.52	2 37	2 29	2 20	2 11	2 06	2 02	1 94	1 92	1.87	1.83	1.80	99	
.995	2.78	2 60	2 50	2 40	2 30	2 23	2 18	2.09	2 06	2 01	1.96	1.93	995	
.999	3 40	3 15	3 01	2 87	2 73	2.64	2 57	2.44	2.41	2.34	2.28	2 23	999	
.9995	3 68	3 39	3 24	3.08	2.92	2 82	2.74	2 60	2.57	2.49	2 41	2 37	9995	
.0005	192	246	278	318	365	398	421	478	493	527	561	585	0005	60
.001	216	270	304	343	389	421	444	497	512	545	579	602	001	
.005	287	343	376	414	458	488	510	559	572	602	633	652	005	
.01	328	383	416	453	495	524	545	592	604	633	658	679	01	
.025	396	450	481	515	555	581	600	641	654	680	704	720	025	
.05	463	514	543	575	611	633	652	690	700	719	746	759	05	
.10	550	596	622	650	682	703	717	750	758	776	793	806	.10	
.25	725	758	776	796	816	830	840	860	865	877	888	896	25	
.50	967	978	983	989	994	998	1 00	1 00	1 01	1 01	1 01	1 01	50	
.75	1 27	1 25	1 24	1.22	1.21	1 20	1 19	1 17	1 17	1.16	1 15	1 15	75	
.90	1 60	1 54	1 51	1 48	1 44	1 41	1 40	1.36	1.35	1 33	1 31	1 29	90	
.95	1 84	1.75	1 70	1.65	1.59	1 56	1 53	1 48	1 47	1.44	1 41	1 39	.95	
.975	2 06	1.94	1 88	1.82	1.74	1 70	1 67	1 60	1 58	1 54	1 51	1 48	.975	
.99	2 35	2.20	2 12	2.03	1.94	1 88	1 81	1 75	1 73	1 68	1 63	1 60	99	
.995	2 57	2 39	2 29	2.19	2.08	2 01	1 96	1 86	1 83	1 78	1 73	1 69	995	
.999	3 08	2 83	2 69	2 56	2.41	2 31	2 25	2 11	2 09	2 01	1 93	1 89	999	
.9995	3 30	3 02	2.87	2.71	2.55	2 45	2.38	2 23	2.19	2 11	2 03	1.98	9995	

PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

ν_2	ν_1 / Cum. Prop.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
120	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}51$	.016	.031	.049	.067	.087	.105	.123	.140	.156	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}81$	.023	.042	.063	.084	.105	.125	.144	.162	.179	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.024	.051	.081	.111	.139	.165	.189	.211	.230	.249	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.074	.110	.143	.174	.202	.227	.250	.271	.290	.01
	.025	$.0^{3}99$	.025	.072	.120	.165	.204	.238	.268	.295	.318	.340	.359	.025
	.05	$.0^{2}39$	.051	.117	.177	.227	.270	.306	.337	.364	.388	.408	.427	.05
	.10	.016	.105	.194	.265	.320	.365	.401	.432	.458	.480	.500	.518	.10
	.25	.102	.288	.405	.481	.534	.574	.606	.631	.652	.670	.685	.699	.25
	.50	.458	.697	.793	.844	.875	.896	.912	.923	.932	.939	.945	.950	.50
	.75	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	.75
	.90	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60	.90
	.95	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83	.95
	.975	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.10	2.05	.975
	.99	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34	.99
	.995	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.62	2.54	.995
	.999	11.4	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24	3.12	3.02	.999
	.9995	12.8	8.10	6.34	5.39	4.79	4.37	4.07	3.82	3.63	3.47	3.34	3.22	.9995
∞	.0005	$.0^{6}39$	$.0^{3}50$	$.0^{2}51$	.016	.032	.050	.069	.088	.108	.127	.144	.161	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}81$	.023	.042	.063	.085	.107	.128	.148	.167	.185	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.024	.052	.082	.113	.141	.168	.193	.216	.236	.256	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.074	.111	.145	.177	.206	.232	.256	.278	.298	.01
	.025	$.0^{3}98$	.025	.072	.121	.166	.206	.241	.272	.300	.325	.347	.367	.025
	.05	$.0^{2}39$	.051	.117	.178	.229	.273	.310	.342	.369	.394	.417	.436	.05
	.10	.016	.105	.195	.266	.322	.367	.405	.436	.463	.487	.508	.525	.10
	.25	.102	.288	.404	.481	.535	.576	.608	.634	.655	.674	.690	.703	.25
	.50	.455	.693	.789	.839	.870	.891	.907	.918	.927	.934	.939	.945	.50
	.75	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.24	.75
	.90	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55	.90
	.95	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	.95
	.975	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.99	1.94	.975
	.99	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18	.99
	.995	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.43	2.36	.995
	.999	10.8	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96	2.84	2.74	.999
	.9995	12.1	7.60	5.91	5.00	4.42	4.02	3.72	3.48	3.30	3.14	3.02	2.90	.9995

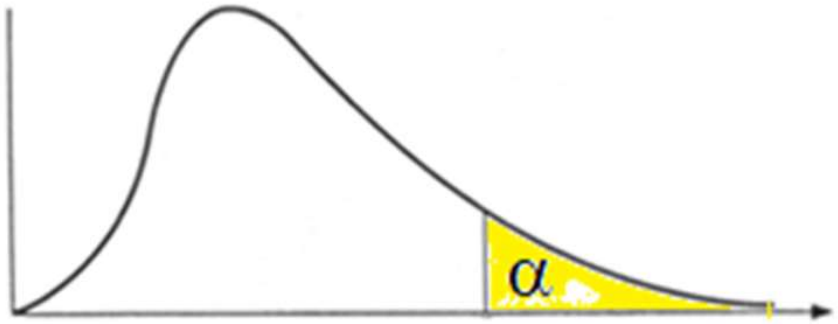
PERCENTILES OF F-DISTRIBUTION (cont.)

ν_1 / Cum. Prop.	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	
.0005	.199	.256	.293	.338	.390	.429	458	524	.543	.578	614	676	.0005	120
.001	.223	.282	.319	.363	.415	453	480	.542	.568	595	.631	691	.001	
.005	.297	356	.393	.434	484	.520	545	605	.623	661	702	.733	005	
.01	.338	.397	.433	.474	522	.556	.579	636	.652	.688	725	.755	.01	
.025	.406	.464	.498	.536	580	.611	.633	684	.698	729	.762	.789	025	
.05	.473	.527	.559	.594	.634	.661	.682	727	.740	.767	.785	.819	.05	
.10	.560	.609	.636	.667	.702	726	.742	781	791	815	.838	.855	.10	
.25	.730	.765	.784	.805	828	.843	.853	877	884	897	.911	.923	.25	
.50	.961	.972	.978	.983	989	992	.994	1 00	1 00	1 00	1.01	1.01	.50	
.75	1.24	1 22	1.21	1.19	1.18	1 17	1 16	1 14	1 13	1 12	1.11	1.10	.75	
.90	1.55	1.48	1.45	1 41	1.37	1 34	1 32	1.27	1 26	1 24	1.21	1.19	.90	
.95	1.75	1.66	1.61	1.55	1 50	1.46	1.43	1 37	1.35	1.32	1.28	1.25	.95	
.975	1.95	1.82	1.76	1.69	1 61	1.56	1.53	1.45	1 43	1.39	1.34	1.31	.975	
.99	2 19	2.03	1.95	1.86	1.76	1 70	1 66	1 56	1 53	1.48	1.42	1.38	.99	
.995	2.37	2 19	2 09	1.98	1.87	1 80	1.75	1 64	1.61	1.54	1.48	1.43	.995	
.999	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	2.02	1.95	1.82	1 76	1.70	1.62	1.54	.999	
.9995	2.96	2.67	2.53	2 38	2 21	2.11	2.01	1.88	1.84	1.75	1.67	1.60	.9995	
.0005	.207	.270	.311	.360	.422	.469	505	.599	.624	.704	.804	1.00	.0005	∞
.001	.232	296	.338	.386	.448	493	527	617	.649	.719	.819	1.00	.001	
.005	.307	372	.412	.460	.518	.559	592	.671	699	.762	.843	1.00	.005	
.01	.349	.413	.452	499	554	.595	.625	.699	.724	.782	.858	1.00	.01	
.025	.418	.480	517	.560	.611	.645	675	.741	.768	.813	.878	1.00	.025	
.05	.484	.543	577	.617	663	.694	.720	.781	.797	.840	.896	1.00	.05	
.10	.570	622	652	.687	.726	.752	.774	.826	.838	.877	.919	1.00	.10	
.25	.736	.773	.793	816	.842	.860	.872	.901	.910	.932	.957	1.00	.25	
.50	.956	.967	.972	978	983	.987	.989	.993	.994	.997	.999	1.00	.50	
.75	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.13	1.12	1.09	1.08	1.07	1.04	1.00	.75	
.90	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.13	1.08	1.00	.90	
.95	1.67	1 57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00	.95	
.975	1.83	1.71	1.64	1 57	1.48	1.43	1.39	1.30	1.27	1.21	1.13	1.00	.975	
.99	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.52	1.47	1.36	1.32	1.25	1.15	1.00	.99	
.995	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.59	1.53	1.40	1.36	1.28	1.17	1.00	.995	
.999	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.73	1.66	1.49	1.45	1.34	1.21	1.00	.999	
.9995	2.65	2.37	2.22	2.07	1.91	1.79	1.71	1.53	1.48	1.36	1.22	1.00	.9995	

Upper percentage points of the *F*-distribution

α=0.01

v_1 / v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30
1	4052·2	4999·5	5403·4	5624·6	5763·6	5859·0	5928·4	5981·1	6022·5	6055·8	6106·3	6157·3	6208·7	6234·6	6260·6
2	98·50	99·00	99·17	99·25	99·30	99·33	99·36	99·37	99·39	99·40	99·42	99·43	99·45	99·46	99·47
3	34·12	30·82	29·46	28·71	28·24	27·91	27·67	27·49	27·35	27·23	27·05	26·87	26·69	26·60	26·50
4	21·20	18·00	16·69	15·98	15·52	15·21	14·98	14·80	14·66	14·55	14·37	14·20	14·02	13·93	13·84
5	16·26	13·27	12·06	11·39	10·97	10·67	10·46	10·29	10·16	10·05	9·89	9·72	9·55	9·47	9·38
6	13·75	10·92	9·78	9·15	8·75	8·47	8·26	8·10	7·98	7·87	7·72	7·56	7·40	7·31	7·23
7	12·25	9·55	8·45	7·85	7·46	7·19	6·99	6·84	6·72	6·62	6·47	6·31	6·16	6·07	5·99
8	11·26	8·65	7·59	7·01	6·63	6·37	6·18	6·03	5·91	5·81	5·67	5·52	5·36	5·28	5·20
9	10·56	8·02	6·99	6·42	6·06	5·80	5·61	5·47	5·35	5·26	5·11	4·96	4·81	4·73	4·65
10	10·04	7·56	6·55	5·99	5·64	5·39	5·20	5·06	4·94	4·85	4·71	4·56	4·41	4·33	4·25
11	9·65	7·21	6·22	5·67	5·32	5·07	4·89	4·74	4·63	4·54	4·40	4·25	4·10	4·02	3·94
12	9·33	6·93	5·95	5·41	5·06	4·82	4·64	4·50	4·39	4·30	4·16	4·01	3·86	3·78	3·70
13	9·07	6·70	5·74	5·21	4·86	4·62	4·44	4·30	4·19	4·10	3·96	3·82	3·66	3·59	3·51
14	8·86	6·51	5·56	5·04	4·69	4·46	4·28	4·14	4·03	3·94	3·80	3·66	3·51	3·43	3·35
15	8·68	6·36	5·42	4·89	4·56	4·32	4·14	4·00	3·89	3·80	3·67	3·52	3·37	3·29	3·21
16	8·53	6·23	5·29	4·77	4·44	4·20	4·03	3·89	3·78	3·69	3·55	3·41	3·26	3·18	3·10
17	8·40	6·11	5·18	4·67	4·34	4·10	3·93	3·79	3·68	3·59	3·46	3·31	3·16	3·08	3·00
18	8·29	6·01	5·09	4·58	4·25	4·01	3·84	3·71	3·60	3·51	3·37	3·23	3·08	3·00	2·92
19	8·18	5·93	5·01	4·50	4·17	3·94	3·77	3·63	3·52	3·43	3·30	3·15	3·00	2·92	2·84
20	8·10	5·85	4·94	4·43	4·10	3·87	3·70	3·56	3·46	3·37	3·23	3·09	2·94	2·86	2·78
21	8·02	5·78	4·87	4·37	4·04	3·81	3·64	3·51	3·40	3·31	3·17	3·03	2·88	2·80	2·72
22	7·95	5·72	4·82	4·31	3·99	3·76	3·59	3·45	3·35	3·26	3·12	2·98	2·83	2·75	2·67
23	7·88	5·66	4·76	4·26	3·94	3·71	3·54	3·41	3·30	3·21	3·07	2·93	2·78	2·70	2·62
24	7·82	5·61	4·72	4·22	3·90	3·67	3·50	3·36	3·26	3·17	3·03	2·89	2·74	2·66	2·58
25	7·77	5·57	4·68	4·18	3·85	3·63	3·46	3·32	3·22	3·13	2·99	2·85	2·70	2·62	2·54
26	7·72	5·53	4·64	4·14	3·82	3·59	3·42	3·29	3·18	3·09	2·96	2·81	2·66	2·58	2·50
27	7·68	5·49	4·60	4·11	3·78	3·56	3·39	3·26	3·15	3·06	2·93	2·78	2·63	2·55	2·47
28	7·64	5·45	4·57	4·07	3·75	3·53	3·36	3·23	3·12	3·03	2·90	2·75	2·60	2·52	2·44
29	7·60	5·42	4·54	4·04	3·73	3·50	3·33	3·20	3·09	3·00	2·87	2·73	2·57	2·49	2·41
30	7·56	5·39	4·51	4·02	3·70	3·47	3·30	3·17	3·07	2·98	2·84	2·70	2·55	2·47	2·39
40	7·31	5·18	4·31	3·83	3·51	3·29	3·12	2·99	2·89	2·80	2·66	2·52	2·37	2·29	2·20
60	7·08	4·98	4·13	3·65	3·34	3·12	2·95	2·82	2·72	2·63	2·50	2·35	2·20	2·12	2·03
120	6·85	4·79	3·95	3·48	3·17	2·96	2·79	2·66	2·56	2·47	2·34	2·19	2·03	1·95	1·86
∞	6·63	4·61	3·78	3·32	3·02	2·80	2·64	2·51	2·41	2·32	2·18	2·04	1·88	1·79	1·70

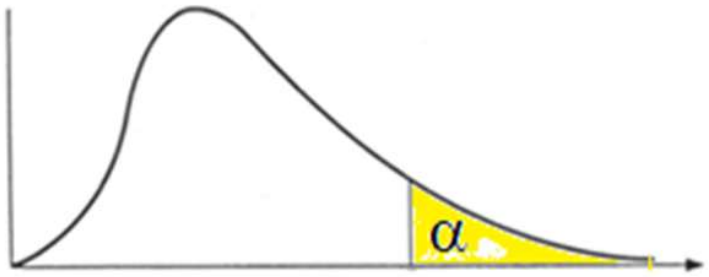


$$F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}$$

(continued)

α=0.025

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30
1	647·79	799·50	864·16	899·58	921·85	937·11	948·22	956·66	963·28	968·63	976·71	984·87	993·10	997·25	1001·4
2	38·51	39·00	39·17	39·25	39·30	39·33	39·36	39·37	39·39	39·40	39·41	39·43	39·45	39·46	39·46
3	17·44	16·04	15·44	1_·10	14·88	14·73	14·62	14·54	14·47	14·42	14·34	14·25	14·17	14·12	14·08
4	12·22	10·65	9·98	9·60	9·36	9·20	9·07	8·98	8·90	8·84	8·75	8·66	8·56	8·51	8·46
5	10·01	8·43	7·76	7·39	7·15	6·98	6·85	6·76	6·68	6·62	6·52	6·43	6·33	6·28	6·23
6	8·81	7·26	6·60	6·23	5·99	5·82	5·70	5·60	5·52	5·46	5·37	5·27	5·17	5·12	5·07
7	8·07	6·54	5·89	5·52	5·29	5·12	4·99	4·90	4·82	4·76	4·67	4·57	4·47	4·41	4·36
8	7·57	6·06	5·42	5·05	4·82	4·65	4·53	4·43	4·36	4·30	4·20	4·10	4·00	3·95	3·89
9	7·21	5·71	5·08	4·72	4·48	4·32	4·20	4·10	4·03	3·96	3·87	3·77	3·67	3·61	3·56
10	6·94	5·46	4·83	4·47	4·24	4·07	3·95	3·85	3·78	3·72	3·62	3·52	3·42	3·37	3·31
11	6·72	5·26	4·63	4·28	4·04	3·88	3·76	3·66	3·59	3·53	3·43	3·33	3·23	3·17	3·12
12	6·55	5·10	4·47	4·12	3·89	3·73	3·61	3·51	3·44	3·37	3·28	3·18	3·07	3·02	2·96
13	6·41	4·97	4·35	4·00	3·77	3·60	3·48	3·39	3·31	3·25	3·15	3·05	2·95	2·89	2·84
14	6·30	4·86	4·24	3·89	3·66	3·50	3·38	3·29	3·21	3·15	3·05	2·95	2·84	2·79	2·73
15	6·20	4·77	4·15	3·80	3·58	3·41	3·29	3·20	3·12	3·06	2·96	2·86	2·76	2·70	2·64
16	6·12	4·69	4·08	3·73	3·50	3·34	3·22	3·12	3·05	2·99	2·89	2·79	2·68	2·63	2·57
17	6·04	4·62	4·01	3·66	3·44	3·28	3·16	3·06	2·98	2·92	2·82	2·72	2·62	2·56	2·50
18	5·98	4·56	3·95	3·61	3·38	3·22	3·10	3·01	2·93	2·87	2·77	2·67	2·56	2·50	2·44
19	5·92	4·51	3·90	3·56	3·33	3·17	3·05	2·96	2·88	2·82	2·72	2·62	2·51	2·45	2·39
20	5·87	4·46	3·86	3·51	3·29	3·13	3·01	2·91	2·84	2·77	2·68	2·57	2·46	2·41	2·35
21	5·83	4·42	3·82	3·48	3·25	3·09	2·97	2·87	2·80	2·73	2·64	2·53	2·42	2·37	2·31
22	5·79	4·38	3·78	3·44	3·22	3·05	2·93	2·84	2·76	2·70	2·60	2·50	2·39	2·33	2·27
23	5·75	4·35	3·75	3·41	3·18	3·02	2·90	2·81	2·73	2·67	2·57	2·47	2·36	2·30	2·24
24	5·72	4·32	3·72	3·38	3·15	2·99	2·87	2·78	2·70	2·64	2·54	2·44	2·33	2·27	2·21
25	5·69	4·29	3·69	3·35	3·13	2·97	2·85	2·75	2·68	2·61	2·51	2·41	2·30	2·24	2·18
26	5·66	4·27	3·67	3·33	3·10	2·94	2·82	2·73	2·65	2·59	2·49	2·39	2·28	2·22	2·16
27	5·63	4·24	3·65	3·31	3·08	2·92	2·80	2·71	2·63	2·57	2·47	2·36	2·25	2·19	2·13
28	5·61	4·22	3·63	3·29	3·06	2·90	2·78	2·69	2·61	2·55	2·45	2·34	2·23	2·17	2·11
29	5·59	4·20	3·61	3·27	3·04	2·88	2·76	2·67	2·59	2·53	2·43	2·32	2·21	2·15	2·09
30	5·57	4·18	3·59	3·25	3·03	2·87	2·75	2·65	2·57	2·51	2·41	2·31	2·20	2·14	2·07
40	5·42	4·05	3·46	3·13	2·90	2·74	2·62	2·53	2·45	2·39	2·29	2·18	2·07	2·01	1·94
60	5·29	3·93	3·34	3·01	2·79	2·63	2·51	2·41	2·33	2·27	2·17	2·06	1·94	1·88	1·82
120	5·15	3·80	3·23	2·89	2·67	2·52	2·39	2·30	2·22	2·16	2·05	1·94	1·82	1·76	1·69
∞	5·02	3·69	3·12	2·79	2·57	2·41	2·29	2·19	2·11	2·05	1·94	1·83	1·71	1·64	1·57

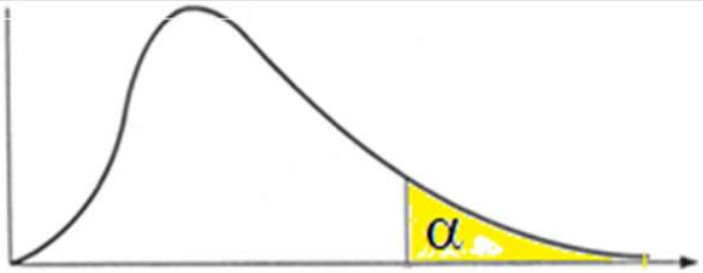


$F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}$

(continued)

α=0.05

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30
1	161·45	199·50	215·71	224·58	230·16	233·99	236·77	238·88	240·54	241·88	243·91	245·95	248·01	249·05	250·10
2	18·51	19·00	19·16	19·25	19·30	19·33	19·35	19·37	19·38	19·40	19·41	19·43	19·45	19·45	19·46
3	10·13	9·55	9·28	9·12	9·01	8·94	8·89	8·85	8·81	8·79	8·74	8·70	8·66	8·64	8·62
4	7·71	6·94	6·59	6·39	6·26	6·16	6·09	6·04	6·00	5·96	5·91	5·86	5·80	5·77	5·75
5	6·61	5·79	5·41	5·19	5·05	4·95	4·88	4·82	4·77	4·74	4·68	4·62	4·56	4·53	4·50
6	5·99	5·14	4·76	4·53	4·39	4·28	4·21	4·15	4·10	4·06	4·00	3·94	3·87	3·84	3·81
7	5·59	4·74	4·35	4·12	3·97	3·87	3·79	3·73	3·68	3·64	3·57	3·51	3·44	3·41	3·38
8	5·32	4·46	4·07	3·84	3·69	3·58	3·50	3·44	3·39	3·35	3·28	3·22	3·15	3·12	3·08
9	5·12	4·26	3·86	3·63	3·48	3·37	3·29	3·23	3·18	3·14	3·07	3·01	2·94	2·90	2·86
10	4·96	4·10	3·71	3·48	3·33	3·22	3·14	3·07	3·02	2·98	2·91	2·84	2·77	2·74	2·70
11	4·84	3·98	3·59	3·36	3·20	3·09	3·01	2·95	2·90	2·85	2·79	2·72	2·65	2·61	2·57
12	4·75	3·89	3·49	3·26	3·11	3·00	2·91	2·85	2·80	2·75	2·69	2·62	2·54	2·51	2·47
13	4·67	3·81	3·41	3·18	3·03	2·92	2·83	2·77	2·71	2·67	2·60	2·53	2·46	2·42	2·38
14	4·60	3·74	3·34	3·11	2·96	2·85	2·76	2·70	2·65	2·60	2·53	2·46	2·39	2·35	2·31
15	4·54	3·68	3·29	3·06	2·90	2·79	2·71	2·64	2·59	2·54	2·48	2·40	2·33	2·29	2·25
16	4·49	3·63	3·24	3·01	2·85	2·74	2·66	2·59	2·54	2·49	2·42	2·35	2·28	2·24	2·19
17	4·45	3·59	3·20	2·96	2·81	2·70	2·61	2·55	2·49	2·45	2·38	2·31	2·23	2·19	2·15
18	4·41	3·55	3·16	2·93	2·77	2·66	2·58	2·51	2·46	2·41	2·34	2·27	2·19	2·15	2·11
19	4·38	3·52	3·13	2·90	2·74	2·63	2·54	2·48	2·42	2·38	2·31	2·23	2·16	2·11	2·07
20	4·35	3·49	3·10	2·87	2·71	2·60	2·51	2·45	2·39	2·35	2·28	2·20	2·12	2·08	2·04
21	4·32	3·47	3·07	2·84	2·68	2·57	2·49	2·42	2·37	2·32	2·25	2·18	2·10	2·05	2·01
22	4·30	3·44	3·05	2·82	2·66	2·55	2·46	2·40	2·34	2·30	2·23	2·15	2·07	2·03	1·98
23	4·28	3·42	3·03	2·80	2·64	2·53	2·44	2·37	2·32	2·27	2·20	2·13	2·05	2·01	1·96
24	4·26	3·40	3·01	2·78	2·62	2·51	2·42	2·36	2·30	2·25	2·18	2·11	2·03	1·98	1·94
25	4·24	3·39	2·99	2·76	2·60	2·49	2·40	2·34	2·28	2·24	2·16	2·09	2·01	1·96	1·92
26	4·23	3·37	2·98	2·74	2·59	2·47	2·39	2·32	2·27	2·22	2·15	2·07	1·99	1·95	1·90
27	4·21	3·35	2·96	2·73	2·57	2·46	2·37	2·31	2·25	2·20	2·13	2·06	1·97	1·93	1·88
28	4·20	3·34	2·95	2·71	2·56	2·45	2·36	2·29	2·24	2·19	2·12	2·04	1·96	1·91	1·87
29	4·18	3·33	2·93	2·70	2·55	2·43	2·35	2·28	2·22	2·18	2·10	2·03	1·94	1·90	1·85
30	4·17	3·32	2·92	2·69	2·53	2·42	2·33	2·27	2·21	2·16	2·09	2·01	1·93	1·89	1·84
40	4·08	3·23	2·84	2·61	2·45	2·34	2·25	2·18	2·12	2·08	2·00	1·92	1·84	1·79	1·74
60	4·00	3·15	2·76	2·53	2·37	2·25	2·17	2·10	2·04	1·99	1·92	1·84	1·75	1·70	1·65
120	3·92	3·07	2·68	2·45	2·29	2·18	2·09	2·02	1·96	1·91	1·83	1·75	1·66	1·61	1·55
∞	3·84	3·00	2·60	2·37	2·21	2·10	2·01	1·94	1·88	1·83	1·75	1·67	1·57	1·52	1·46



$F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}$